Gli insiemi: definizioni, simboli e diagramma di Eulero-Venn

6'

Nonostante possa sembrare una questione banale o un inutile esercizio retorico, definire cosa sia effettivamente un *insieme* è un grosso problema, se affrontato con leggerezza. Verso la fine del XIX secolo, mossi dalla necessità di gettare delle solide basi per la matematica moderna (in alcuni campi, già ampiamente sviluppata), molti matematici tra cui **Georg Cantor** e **Richard Dedekind** fecero uno dei primi tentativi di costituire ciò che oggi potremmo chiamare i *fondamenti della matematica*, arrivando a una prima formulazione della *Teoria degli Insiemi*. Questa teoria è attualmente considerata di capitale importanza per **la comprensione di quasi ogni ambito della matematica**: per questo motivo, l'insegnamento di questo argomento inizia molto presto nelle scuole di oggi.

Definizione

In matematica, la parola ***insieme*** viene utilizzata per indicare un raggruppamento, una raccolta, una collezione di elementi distinti fra loro che rispettano inequivocabilmente una o più proprietà che definiscono l'insieme considerato.

Come appena visto, un insieme non può essere definito a partire da concetti più semplici; abbiamo utilizzato dei termini che nella lingua italiana sono sostanzialmente dei sinonimi, come "raggruppamento", "collezione" e "raccolta". Per questo motivo diremo che l'insieme è un *ente primitivo*, così come lo è una retta o un piano in Geometria Euclidea.

Un *concetto primitivo* è anche l'idea di ***appartenenza***, ovvero la caratteristica di un certo elemento di essere contenuto (o *non* essere contenuto, in caso di non appartenenza) all'interno di un insieme.

Notazione: generalmente un insieme viene indicato con una lettera latina maiuscola (A, B, C ... ma anche X, Y, ...) mentre un generico elemento di un insieme viene indicato con una lettera latina minuscola ($a, b, c, \dots, x, y \dots$).

Inoltre, quando un elemento a appartiene a un insieme A, si scrive $a \in A$. Quando invece un elemento a non appartiene ad A, si scrive $a \in/A$.

Definizione

Diremo che un insieme è ***finito*** se è possibile contare i suoi elementi e il conteggio dei suoi elementi ha un termine. Il numero ottenuto alla fine del conteggio è detto ***cardinalità*** dell'insieme, e viene indicato con $\#A$.
Un insieme è invece detto ***infinito*** se non è finito.

Esiste un concetto di cardinalità anche per gli insiemi infiniti che è di fatto in grado di distinguere certe tipologie di insiemi, nonostante a un primo sguardo sembri che la cardinalità di un insieme infinito sia semplicemente "infinito", dato che non si possono contare i suoi elementi. Il discorso è tuttavia molto delicato, e lo affronteremo in parte quando analizzeremo i numeri naturali.

Rappresentazioni di un insieme

Consideriamo l'insieme A costituito dalle vocali della parola "insieme". In quanti modi possiamo descrivere, o rappresentare questo insieme?

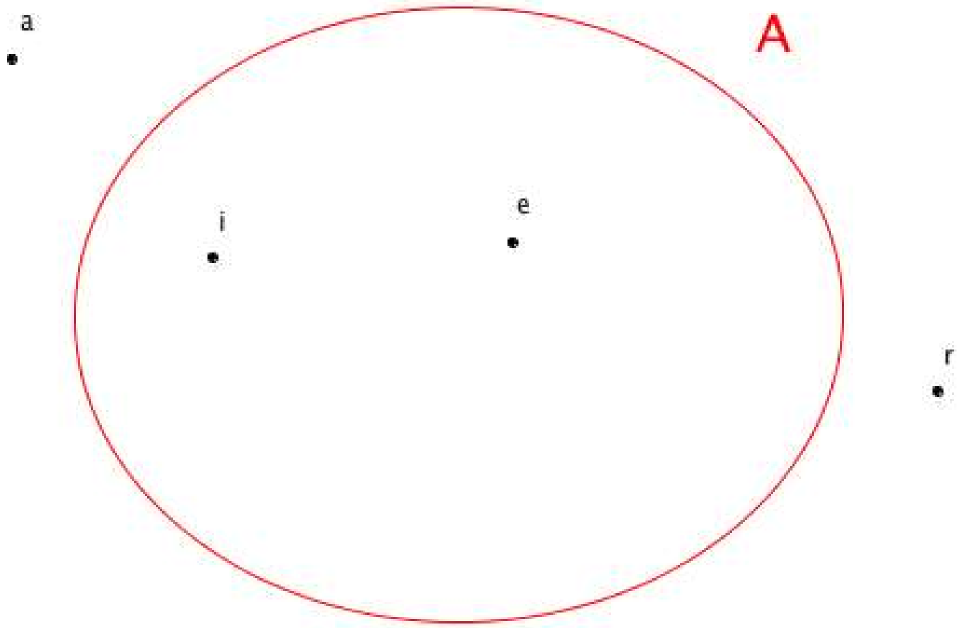
- un modo l'abbiamo implicitamente già trovato, appena abbiamo nominato A, descrivendo la proprietà che un oggetto deve possedere per appartenere ad A. In questo caso si parla di ***rappresentazione intensiva*** dell'insieme A, e in maniera rigorosa si scrive

$$A = \{x \mid x \text{ è una vocale della parola "insieme"}\}$$

- un secondo modo, sicuramente più diretto, consiste nell'elencazione di tutti gli elementi contenuti in A, che nel nostro caso sono le lettere "i" ed "e". In simboli, si scrive

$$A = \{i, e\}$$

ed è la ***rappresentazione estensiva*** di A.
- il terzo modo, per certi versi simile alla rappresentazione estensiva ma molto più flessibile, è l'utilizzo dei ***diagrammi di Eulero*-Venn**. Si tratta di una rappresentazione grafica, dove l'insieme viene raffigurato come una regione chiusa del piano e ogni elemento appartenente all'insieme come un punto interno di questa regione. Nel nostro caso:



$$i, e \in A; \qquad a, r \notin A$$

Quali sono gli *svantaggi* e i *vantaggi* di ciascuna di queste rappresentazioni?

- *Rappresentazione intensiva*

  PRO: molto sintetica, precisa; fa capire al volo l'idea con cui è stato definito l'insieme.

  CONTRO: si perdono di vista gli elementi veri e propri dell'insieme

CONTRO: si perdono di vista gli elementi veri e propri dell'insieme.

- *Rappresentazione estensiva*

  PRO: non c’è possibilità di sbagliarsi sugli elementi contenuti nell’insieme, permette un miglior controllo della situazione.
  CONTRO: non è possibile rappresentare in maniera precisa insiemi infiniti.

- *Diagrammi di Eulero-Venn*

  PRO: di grande impatto visivo, permette di visualizzare facilmente le operazioni di intersezione, unione e complementare.
  CONTRO: poco utilizzabile in caso di insiemi infiniti e quando si ha a che fare con numerosi insiemi.

Simbologia di base e prime definizioni

Definizione

Un insieme A si dice ***vuoto*** quando non contiene alcun elemento, e scriviamo $A = \emptyset$.

Definizione

Diremo che due insiemi A e B sono ***uguali*** quando essi contengono esattamente gli stessi elementi.

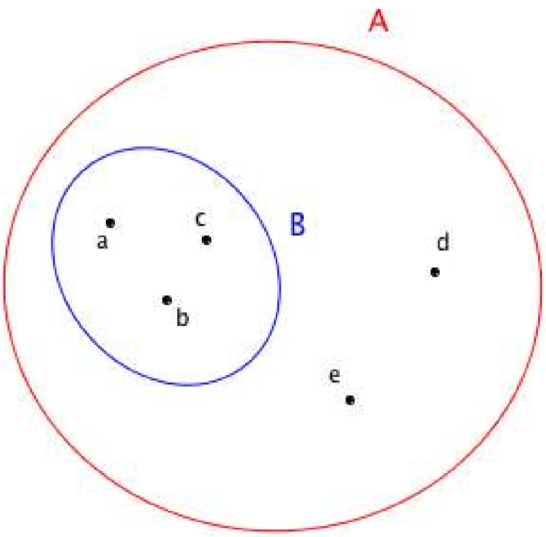
Definizione

Quando ciascun elemento di un insieme A è contenuto in un altro insieme B, diremo che A è un ***sottoinsieme*** di B, e scriveremo $A \subseteq B$.

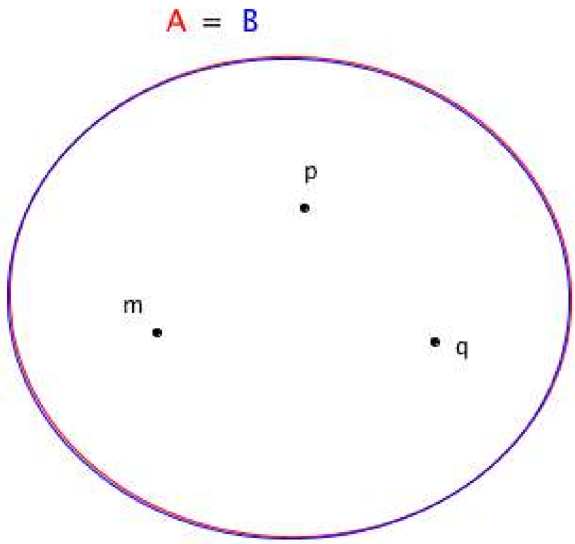
Notiamo che:

- nella definizione precedente non facciamo riferimento a eventuali altri elementi di B che non siano anche in A, quindi potenzialmente A e B potrebbero essere uguali;
- l’insieme vuoto $\emptyset$ è automaticamente un sottoinsieme di qualsiasi altro insieme B. Infatti siccome l’insieme vuoto non contiene nessun elemento, la proprietà “gli elementi di $\emptyset$ sono contenuti in B” viene automaticamente verificata, perché non c’è alcun elemento di $\emptyset$ che non la soddisfa!

Per risolvere queste ambiguità, diremo che A è un ***sottoinsieme proprio*** di B se non è vuoto e se ci sono altri elementi di B non contenuti in A.



$a, b, c \in B;$
$a, b, c, d, e \in A; \quad \Rightarrow \quad B \subset A$
$d, e \notin B.$



$B = A \quad \Rightarrow \quad B \subseteq A$

Definizione

Prendiamo un insieme A. L’insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A è detto ***insieme delle parti*** di A, e si indica con $\mathcal{P}(A)$.

È possibile dimostrare che, se A è un insieme con $\#A = n$, allora $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$.

La nozione di insieme delle parti non è semplice da fare propria: chiariamola con un esempio. Prendiamo l'insieme $A = \{x, y, z\}$ (che ha cardinalità 3). Quali sono i sottoinsiemi di A? Elenchiamoli qui di seguito:

$$A, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}.$$

Notiamo che tra i sottoinsiemi di A ci sono anche i sottoinsiemi "banali", chiamati spesso *singoletti*, costituiti da un solo elemento. Essi NON sono da confondere con gli elementi stessi che contengono: sono infatti insiemi, non elementi!
L'insieme delle parti è l'insieme che contiene ogni sottoinsieme di A. Possiamo rappresentarlo estensivamente:

$$\mathcal{P}(A) = \{A, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}$$

Effettivamente, la cardinalità di $\mathcal{P}(A)$ è $2^3 = 8$.

Revisione scientifica a cura di Marco Guglielmino.

VAI ALLA PROSSIMA LEZIONE 2

Testo su Matematica

Relatori

Michele Ferrari

Domande

Nella rappresentazione di Eulero-Venn del sottoinsieme, se non erro, è B ad essere sottoinsieme di A e non viceversa come invece riportato nel testo. Grazie e buona giornata!

0 RISPOSTE **VAI ALLA DOMANDA**

Siamo fieri di condividere tutti i contenuti di questo sito, eccetto dove diversamente specificato, sotto licenza Creative Commons BY-NC-ND 2.5

Contatti Pubblicità Quality policy

Privacy e cookie policy Cambia scelte di riservatezza

Oilproject Srl P.IVA 07236760968

Operazioni con gli insiemi: prodotto cartesiano e insieme complementare, unione, intersezione

6'

Dati due insiemi A e B, è ragionevole poter essere in grado di controllare, per esempio, quali elementi hanno in comune; oppure quali sono gli elementi che costituiscono A e B, se li consideriamo come un unico insieme "più grande". Questi sono dei primi esempi di *operazioni tra insiemi*.

Definizione

Dati due insiemi A e B, si chiama ***intersezione*** (o ***insieme intersezione***) di A e B l'insieme degli elementi che appartengono contemporaneamente sia ad A che a B. Questo insieme viene indicato con $A \cap B$.

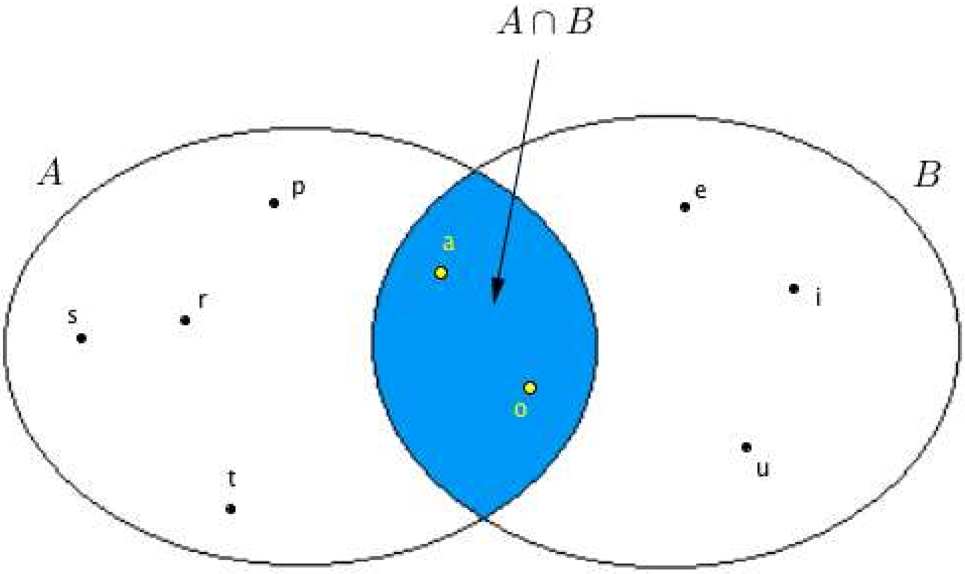
Per esempio, consideriamo l'insieme A costituito dalle lettere della parola "passaporto" e l'insieme B costituito da tutte le vocali dell'alfabeto italiano. La situazione è la seguente:

- Rappresentazione intensiva:

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid x \text{ è una lettera della parola “passaporto”}\} \\ B &= \{x \mid x \text{ è una vocale dell'alfabeto italiano}\} \\ A \cap B &= \{x \mid x \text{ è una lettera di “passaporto” e una vocale dell'alfabeto}\} \end{aligned}$$

- Rappresentazione estensiva:

$$\begin{aligned} A &= \{p, a, s, o, r, t\} \\ B &= \{a, e, i, o, u\} \\ A \cap B &= \{a, o\} \end{aligned}$$



Diremo che due insiemi A e B sono ***disgiunti*** quando $A \cap B = \emptyset$.

Definizione

Dati due insiemi A e B, si chiama ***unione*** (o ***insieme unione***) di A e B l'insieme degli elementi appartenenti ad A oppure a B, cioè appartenenti ad almeno uno dei due. Questo insieme viene indicato con $A \cup B$.

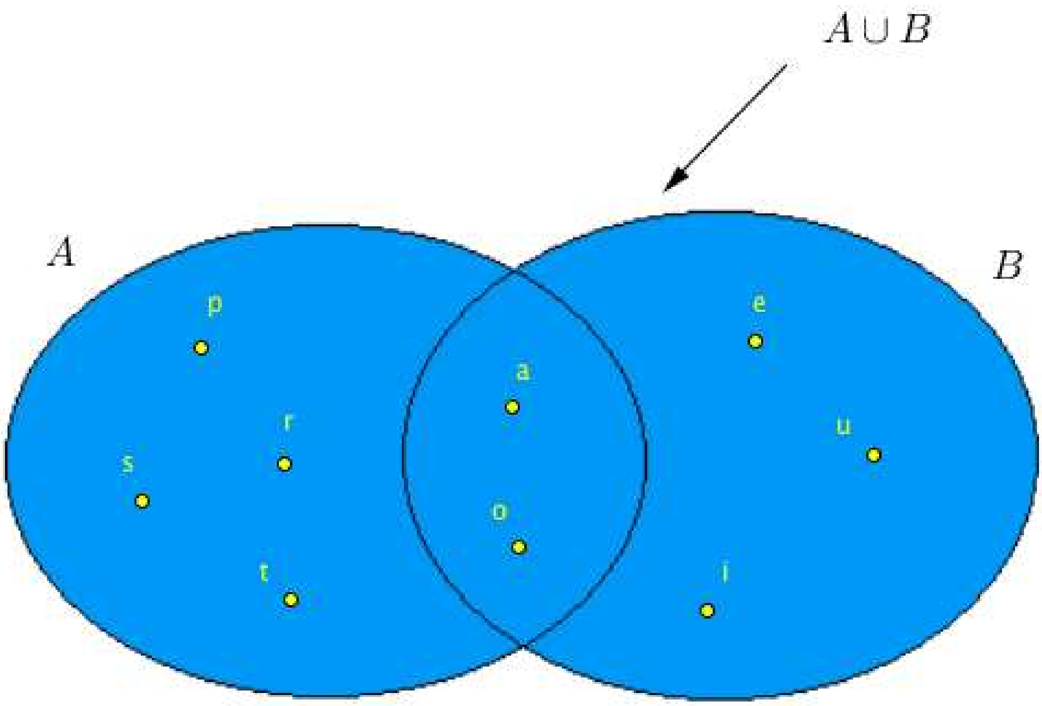
Ritornando all'esempio precedente:

- Rappresentazione intensiva:

$$A \cup B = \{x \mid x \text{ è una lettera di "passaporto" o una vocale dell'alfabeto}\}$$

- Rappresentazione estensiva:

$$A \cup B = \{p, a, s, o, r, t, e, i, u\}$$



Definizione

Dati due insiemi A e B, si chiama ***differenza*** (o ***insieme differenza***) di A e B l'insieme costituito dagli elementi di A che non appartengono a B.

Questo insieme viene indicato con $A - B$ (a volte, anche con $A \setminus B$).

Notiamo che nell'effettuare una sottrazione tra insiemi l'*ordine* degli insiemi è molto significativo. Sempre facendo riferimento al nostro esempio, infatti:

- Rappresentazione intensiva:

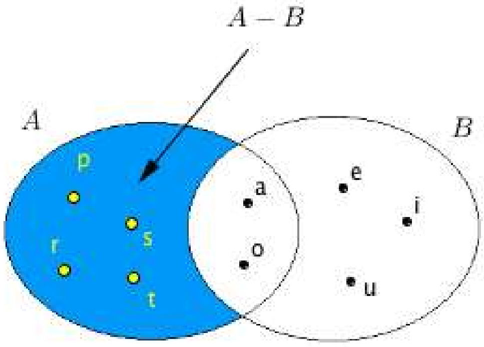
$$A - B = \{x \mid x \text{ è una lettera di "passaporto" ma non una vocale dell'alfabeto}\};$$

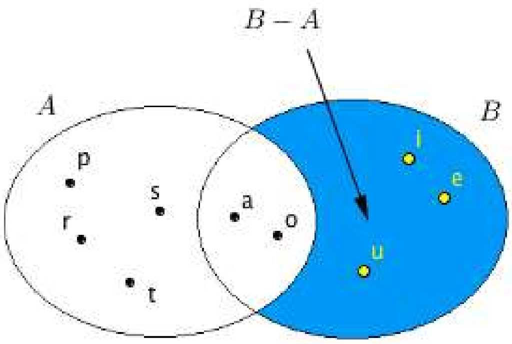
$$B - A = \{x \mid x \text{ è una vocale dell'alfabeto ma non una lettera di "passaporto"}\}.$$

- Rappresentazione estensiva:

$$B - A = \{e, i, u\};$$

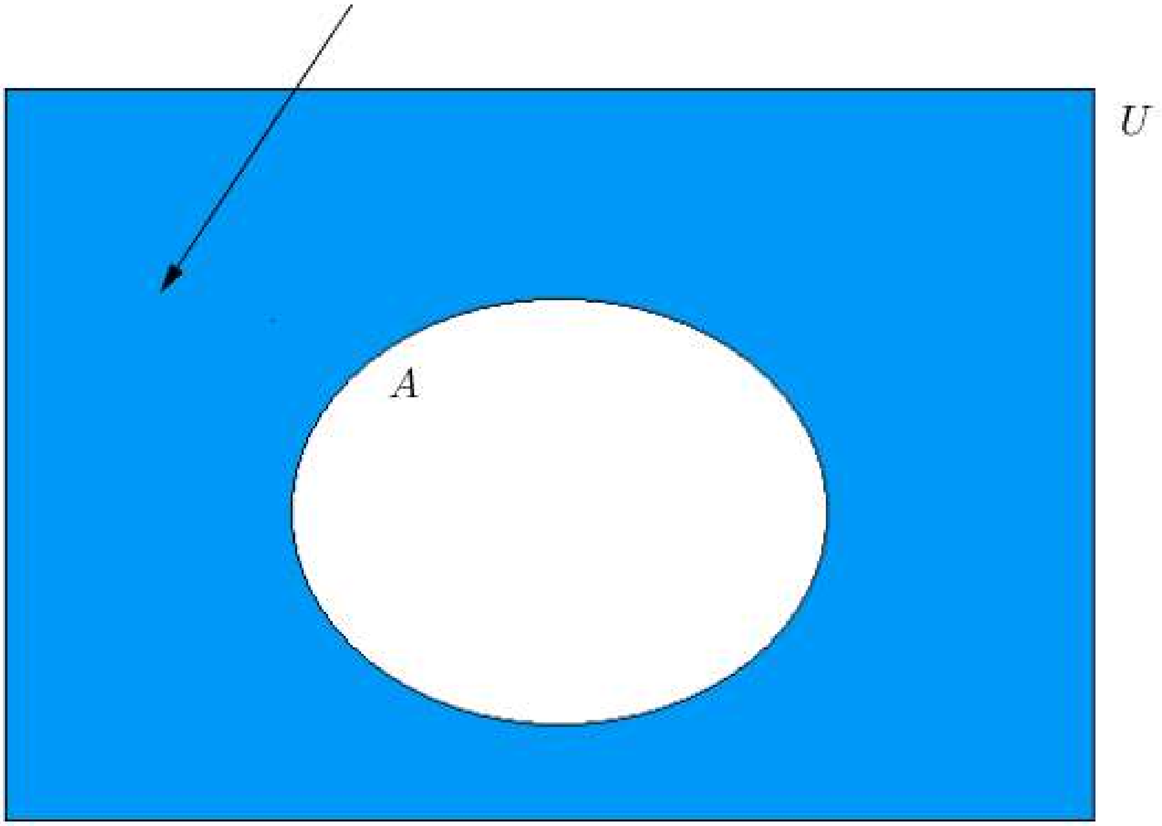
- Diagramma di Eulero-Venn:





Definizione

Si definisce ***complementare*** di un insieme A rispetto a un *insieme universo* (o anche *insieme ambiente*) U, con $U \supseteq A$, l'insieme degli elementi di U che non appartengono ad A.
Quando non è necessario specificare U, l'insieme complementare di A si indica con $\bar{A}$ (che è la scrittura più comune); in alternativa, possiamo scrivere $C_U\, A$.



Per il nostro esempio, possiamo considerare come insieme universo U tutte le lettere dell'alfabeto italiano: allora

$$\bar{B} = C_U B = \{x \mid x \in U, x \notin B\} = \{x \mid x \text{ è una consonante dell'alfabeto italiano}\}$$

ma anche

$$\bar{A} = C_U A = \{x \mid x \text{ non è una lettera di "passaporto", ma una lettera dell'alfabeto}\}$$

.

ATTENZIONE: La scelta dell'insieme universo cambia radicalmente il complementare dell'insieme che si sta considerando. Per esempio, abbiamo già visto che $C_U B =$ { le consonanti dell'alfabeto italiano}, *ma scegliendo un nuovo insieme universo* $U' =$ {le lettere della parola "estuario"} *allora* $C_{U'} B = \{s, t, r\}$.

Dati due insiemi A e B, si definisce ***prodotto cartesiano*** degli insiemi A e B l'insieme costituito da tutte le coppie ordinate di elementi di A e B (per coppia ordinata, intendiamo una coppia di oggetti in cui sia possibile distinguere un primo elemento e un secondo elemento).
Nel caso in cui si scelga di porre A prima di B, il prodotto cartesiano è indicato con $A \times B$; altrimenti, scriveremo $B \times A$.

Capiamo meglio questa definizione riferendoci sempre al nostro esempio:

- Rappresentazione intensiva:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \text{ è una lettera di “passaporto”}, y \text{ è una vocale dell'alfabeto}\};$$

$$B \times A = \{(x, y) \mid x \text{ è una vocale dell'alfabeto}, y \text{ è una lettera di “passaporto”}\}.$$

- Rappresentazione estensiva:

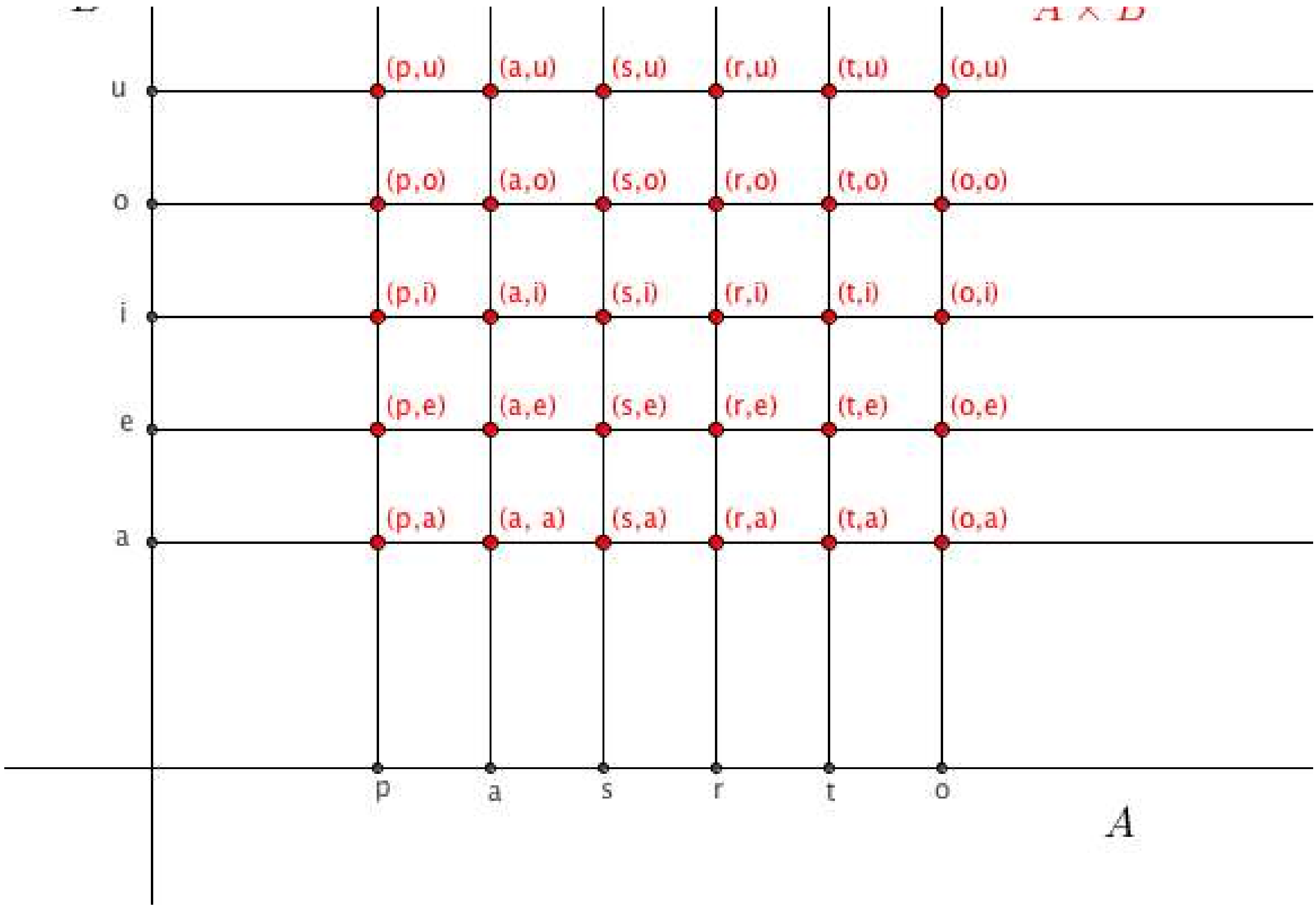
$$A \times B = \{(p, a), (p, e), (p, i), (p, o), (p, u), (a, a), (a, e), (a, i), (a, o), (a, u), (s, a), (s, e), (s, i) \ldots\};$$

$$B \times A = \{(a, p), (a, a), (a, s), (a, o), (a, r), (a, t), (e, p), (e, a), (e, s), (e, o), (e, r), (e, t), (i, p), (i, a) \ldots\}.$$

Non possiamo rappresentare la situazione con un diagramma di Eulero-Venn, ma possiamo introdurre un altro metodo di visualizzazione degli insiemi, adatto solo per i prodotti cartesiani: il ***diagramma cartesiano***. Il procedimento per costruirlo è il seguente:

1. rappresentare schematicamente gli insiemi A e B su due rette distinte, poste perpendicolarmente, in modo che la retta orizzontale sia quella di A se si vuole rappresentare $A \times B$;
2. in corrispondenza di ciascun elemento di A e B, tracciare una semiretta perpendicolare alla retta che rappresenta l'insieme;
3. ciascun incrocio di queste rette viene considerato come un elemento di $A \times B$.

Procediamo con la rappresentazione di $A \times B$:



Notiamo infine che se A ha cardinalità n e B ha cardinalità m, allora $\#(A \times B) = \#(B \times A) = n \cdot m$.

Operazioni tra insiemi: formule

Vediamo qui di seguito alcune proprietà delle operazioni che abbiamo appena introdotto e delle identità che le legano tra loro.

D'ora in poi, A, B, C saranno insiemi generici, contenuti in un insieme universo U.

L'operazione di intersezione $\cap$ è:

- *commutativa:* $A \cap B = B \cap A$

- *distributiva rispetto all'unione*: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- *dotata di elemento neutro* U: $A \cap U = A$

L'operazione di unione $\cup$ è:

- *commutativa*: $A \cup B = B \cup A$
- *associativa*: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- *distributiva rispetto all'intersezione*: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- *dotata di elemento neutro* $\emptyset$: $A \cup \emptyset = A$

Inoltre valgono:

- $A \cup \bar{A} = U, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$;
- $A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (B \cup A) = A$;
- $A - B = A \cap \bar{B}$;
- $\bar{\bar{A}} = A$.

Hanno particolare importanza le cosiddette *Leggi di de Morgan*:

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Revisione scientifica a cura di Marco Guglielmino.

VAI ALLA PROSSIMA LEZIONE 3

Testo su Matematica

Michele Ferrari

Domande

VORREI CHIEDERE: 2 INSIEMI UNITI DEVONO ESSERE NECESSARIAMENTE INTERSECATI?

1 RISPOSTE **VAI ALLA DOMANDA**

Vorrei sapere il risultato A={ x€N:x=(n:2)+3n, con n compreso tra 1 e 8 con 1/8 compresi} B= {x€N: x è un numero pari minore uguale a 14} C ={ 7,12,14,11} Determinare AintersezioneB , B-C, A-B, (AunioneB) - (AintersezioneB).

1 RISPOSTE **VAI ALLA DOMANDA**

Letteratura Italiana

Matematica

Biologia

Chimica

Storia

Fisica

Lingua Inglese

Scienze della Terra

Siamo fieri di condividere tutti i contenuti di questo sito, eccetto dove diversamente specificato, sotto licenza Creative Commons BY-NC-ND 2.5

Contatti Pubblicità Quality policy

Privacy e cookie policy Cambia scelte di riservatezza

Oilproject Srl P.IVA 07236760968

I numeri naturali e i numeri interi: l'insieme N e l'insieme Z

4'

Nella vita di tutti i giorni, ci capita spesso di avere la necessità di contare qualcosa, o di "mettere in ordine" degli oggetti. Anche se non ce ne rendiamo conto, ogni volta che lo facciamo stiamo utilizzando un concetto matematico di enorme importanza: i *numeri naturali*.

Definizione

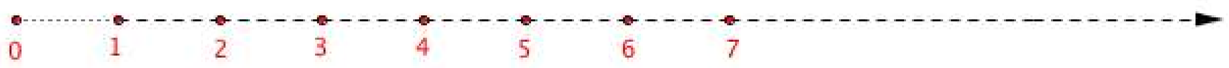
Consideriamo l'insieme costituito dai numeri 1, 2, 3 .... Questo insieme viene indicato con $\mathbb{N}$ e si chiama ***insieme dei numeri naturali***.

Ciascun numero naturale rappresenta il concetto matematico che sta dietro alla "quantificazione" degli oggetti che ci circondano. Per capirci meglio: cos'hanno in comune tre automobili, tre sogni, tre pianeti? Stiamo sempre parlando di tre oggetti: questa "caratteristica" in comune è identificabile con il numero naturale "3".

Elenchiamo alcune proprietà di $\mathbb{N}$:

- è un ***insieme ordinato***, ovvero, dati due numeri, è sempre possibile stabilire quale precede (o segue) l'altro;
- è ***infinito***, o meglio, *illimitato superiormente*. Infatti non riusciamo a pensare a un numero naturale più grande di tutti gli altri numeri;
- ha un ***elemento minimo***, che è il numero 1. A volte si inserisce in $\mathbb{N}$ anche il numero 0

minimo; altre volte si preferisce invece escluderlo e definire invece $\mathbb{N} \cup \{0\} =: \mathbb{N}_0$.



La rappresentazione dei numeri naturali su una semiretta

Sebbene gli elementi di $\mathbb{N}$ siano infiniti, possiamo comunque pensare di poterli distinguere e contare uno a uno, a differenza di ciò che accade considerando altri "tipi" di insiemi infiniti. Per esempio, come si fa a contare quanti istanti sono passati da quando hai iniziato a leggere questa lezione fino a ora? Sono certamente infiniti, e ogni istante è di fatto indistinguibile dal successivo e dal precedente anche se evidentemente ognuno di essi è distinto dagli altri. Di più: non è neanche possibile individuare veramente un istante successivo o precedente a un istante dato, perché tra due istanti è sempre possibile trovarne infiniti altri!

Definizione

Per riassumere quanto detto poco fa, diremo che $\mathbb{N}$ è un insieme ***infinito numerabile***.

L'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$

All'interno di $\mathbb{N}$ è possibile definire le operazioni di *addizione* e di *sottrazione*. Molto spesso, però, la sottrazione *non dà dei risultati contenuti in* $\mathbb{N}$. Per esempio: se proviamo a sottrarre 5 al numero 4, cioè a fare l'operazione 4 – 5, ci accorgiamo che il risultato non sta in $\mathbb{N}$: ovvero non esiste nessun numero naturale che sommato a 5 ci dia il numero 4.
La sensazione è che in $\mathbb{N}$ "manchi qualcosa" che permetta di svolgere la sottrazione con serenità, per qualunque scelta dei numeri coinvolti nell'operazione. A questi "oggetti mancanti" è stato dato il nome di ***interi negativi***, e vengono indicati con un numero naturale preceduto da un segno meno (come −2, −4, −52 ...): nel nostro esempio, al risultato dell'operazione 4 – 5 viene

Definizione

L’insieme costituito da $\mathbb{N}$, il numero 0 e tutti i numeri interi negativi viene chiamato ***insieme dei numeri interi relativi***, spesso chiamati solo ***numeri interi***, e viene indicato con $\mathbb{Z}$. I numeri naturali $\mathbb{N}$, considerati come elementi di $\mathbb{Z}$, vengono detti ***interi positivi***.

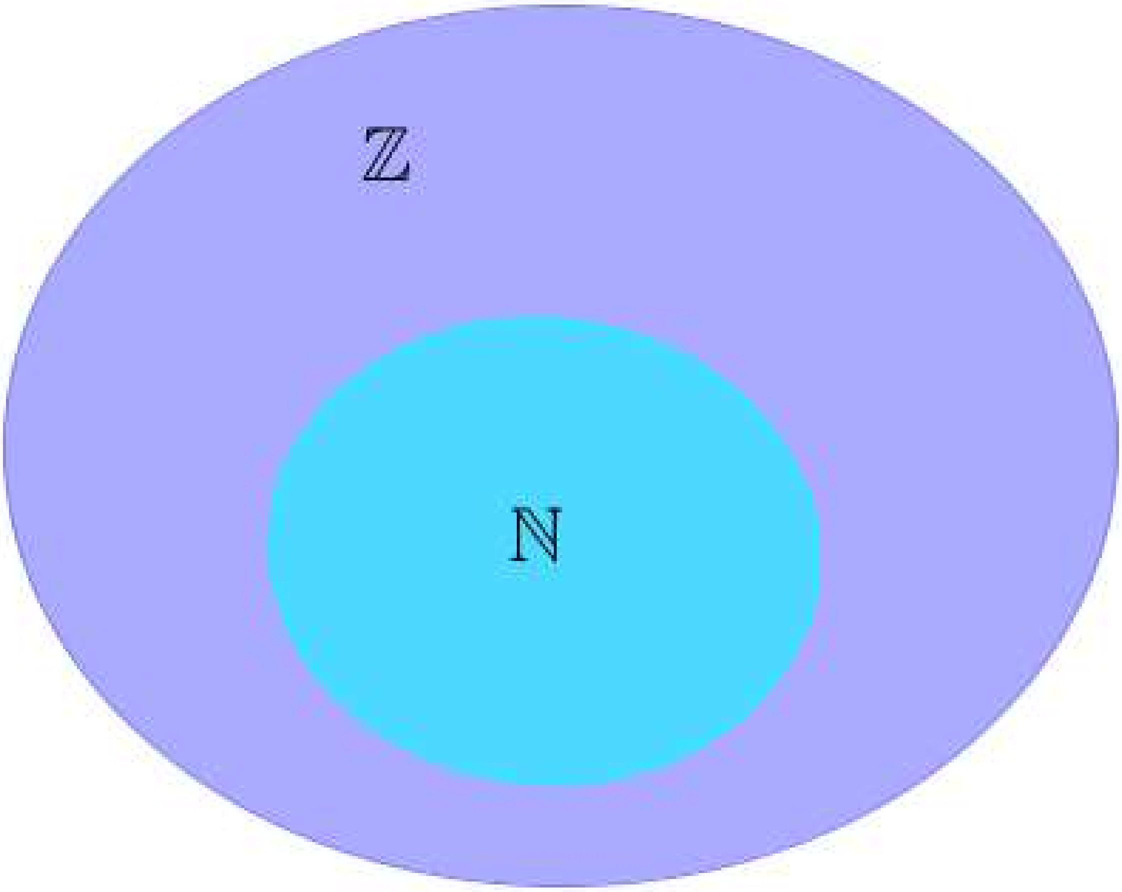
I numeri interi a e $-a$, per ogni $a \in \mathbb{N}$, vengono detti ***opposti***.

Elenchiamo alcune proprietà di $\mathbb{Z}$:

- $\mathbb{N}$ è un suo sottoinsieme proprio;
- è un ***insieme ordinato***;
- è ***infinito***, essendo sia illimitato inferiormente che superiormente.

La rappresentazione dell'insieme dei numeri interi relativi su una retta

Rappresentiamo con un diagramma di Venn il rapporto tra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$:



ℕ è un sottoinsieme di ℤ.

Nonostante possa sembrare che in ℤ ci siano "più numeri" di quanti ce ne siano in ℕ (anzi, si direbbe che ce ne siano esattamente il doppio!) si può invece dimostrare che ℤ è ***infinito numerabile*** esattamente come ℕ, ovvero per ogni elemento di ℤ posso trovare uno e un solo elemento di ℕ a esso corrispondente (o come si dice con un termine tecnico, ℤ e ℕ possono essere messi in corrispondenza biunivoca).

Revisione scientifica a cura di Marco Guglielmino

VAI ALLA PROSSIMA LEZIONE 4

Testo su Matematica

Relatori

Michele Ferrari

Domande

dimostrare con un esempio la corrispondenza biunivoca fra fra Z ed N. Grazie

1 RISPOSTE **VAI ALLA DOMANDA**

hai video al riguardo è per mia figlia credo che possa capirne di piu

1 RISPOSTE **VAI ALLA DOMANDA**

Letteratura Italiana

Matematica

Biologia

Chimica

Storia

Fisica

Scienze della Terra

Arti & Tecniche

Musica

Filosofia

Glossario

Seguici su

Siamo fieri di condividere tutti i contenuti di questo sito, eccetto dove diversamente specificato, sotto licenza Creative Commons BY-NC-ND 2.5

Contatti Pubblicità Quality policy

Privacy e cookie policy Cambia scelte di riservatezza

Oilproject Srl P.IVA 07236760968