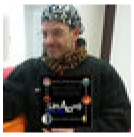
RISORSE DIDATTICHE.



【ResearchGate Project】 *By … 0000-0001-5086-7401 & lnkd.in/erZ48tm*

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

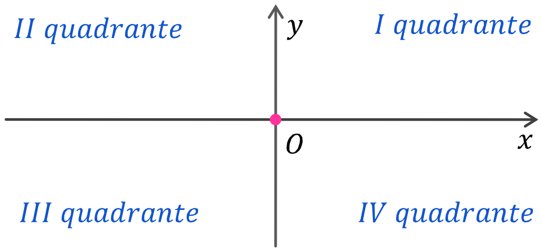
.

.

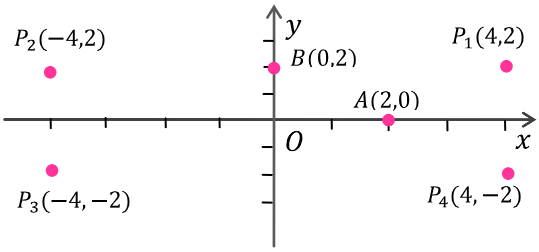
.

Geometria analitica: assi e punti

sistema di assi cartesiani monometrico ortogonale

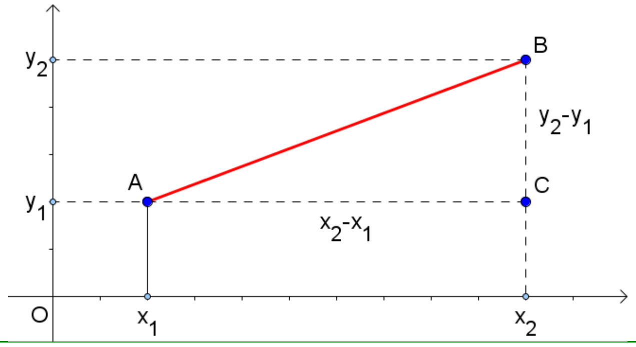


- O: è l'origine degli assi cartesiani
- x: è l'*asse delle ascisse*
- y: è l'*asse delle ordinate*



- $O(0,0)$: origine degli assi cartesiani
- $A(2,0)$: punto di ascissa $x = 2$ e ordinata $y = 0$
- $B(0,2)$: punto di ascissa $x = 0$ e ordinata $y = 2$
- $P_1(4,2)$: punto di ascissa $x = 4$ e ordinata $y = 2$
- P_2: punto simmetrico di P_1 rispetto all'asse y
- P_3: punto simmetrico di P_1 rispetto ad O
- P_4: punto simmetrico di P_1 rispetto all'asse x

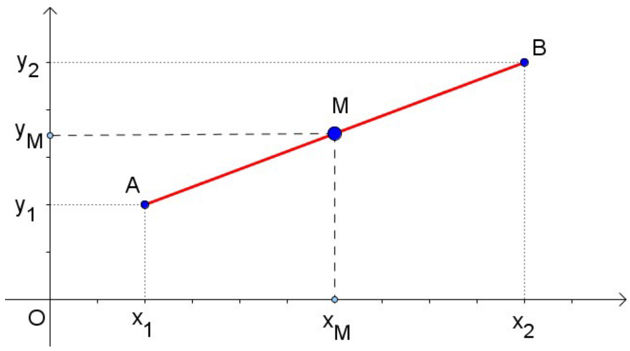
distanza tra due punti $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$



la distanza tra due punti A e B è uguale alla lunghezza del segmento AB.
La distanza AB rappresenta l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC e si calcola applicando il teorema di Pitagora:

$$\boldsymbol{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

punto medio $M(x_M, y_M)$ di un segmento di estremi $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$



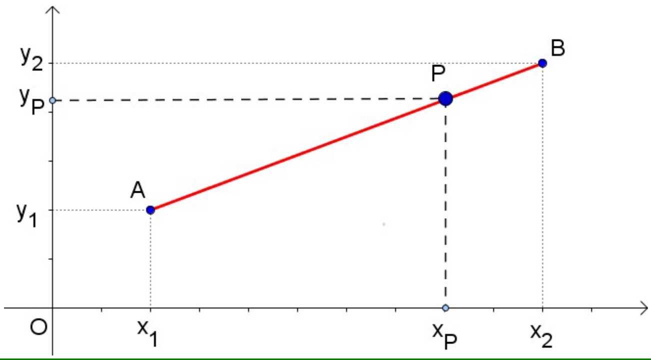
il punto medio $M(x_M, y_M)$ del segmento AB è un punto appartenente al segmento ed equidistante dagli estremi del segmento stesso cioè $AM = MB$
Le sue coordinate sono:

$$\boldsymbol{x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

inversamente: note le coordinate di un estremo e del punto medio, le coordinate del secondo estremo sono: $x_2 = 2x_M - x_1$ $\quad y_2 = 2y_M - y_1$

il punto B si dice il simmetrico di A rispetto ad M e viceversa A si dice il simmetrico di B rispetto ad M

dividere un segmento in parti proporzionali ad un numero k



il punto $P(x_p, y_p)$, divide il segmento di estremi $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ in parti proporzionali a k, cioè tale che il rapporto tra AP e AB è uguale a k:

$$\frac{AP}{\boldsymbol{AB}} = k$$

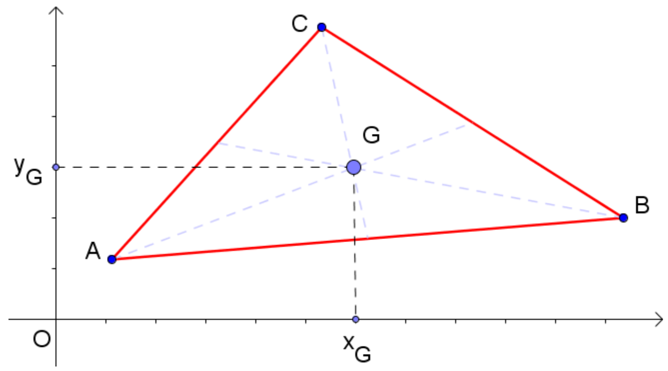
Le sue coordinate sono:

$$\boldsymbol{x_p = x_1 + k \cdot (x_2 - x_1)}$$
$$\boldsymbol{y_p = y_1 + k \cdot (y_2 - y_1)}$$

se P è il punto medio del segmento AB le formule si riducono a quelle del punto medio di un segmento

Geometria analitica: assi e punti

baricentro $G(x_G, y_G)$ di un triangolo di vertici $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),\ C(x_3,y_3)$



il baricentro $G(x_G, y_G)$ di un triangolo è il punto di incontro delle mediane. Le sue coordinate sono:

$$\boldsymbol{x_G = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}} \qquad \boldsymbol{y_G = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}}$$

inversamente: note le coordinate di due vertici del triangolo e del suo baricentro, le coordinate del terzo vertice sono:

$$x_3 = 3x_G - x_1 - x_2 \qquad y_3 = 3y_G - y_1 - y_2$$

area di un triangolo

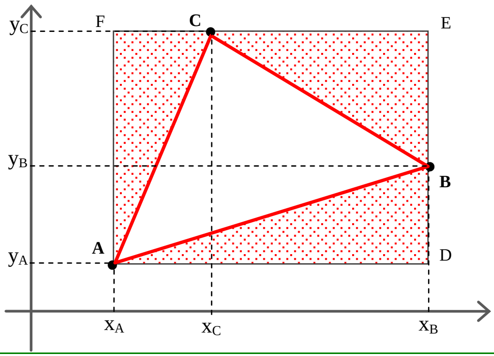
metodo del determinante (regola di Sarrus)

l'area del triangolo di vertici $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),\ C(x_3,y_3)$ è uguale ad un mezzo del **valore assoluto** del determinante della matrice dei punti A, B, C

\+ \+ \+ − − −

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{matrix} = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + y_1x_3 + x_2y_3 - y_2x_3 - x_1y_3 - y_1x_2\right|$$

metodo geometrico

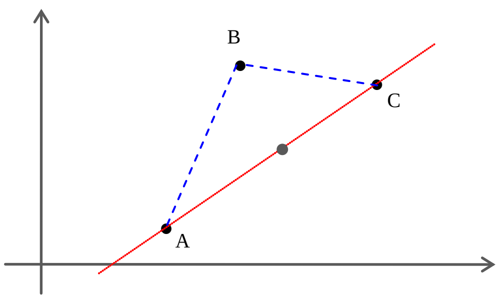


per calcolare l'area del triangolo ABC

- si calcola l'area del rettangolo ADEF circoscritto al triangolo ABC
- dall'area del rettangolo si sottraggono le aree dei tre triangoli rettangoli ADB, BEC, CFA:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ADEF} - \mathcal{A}_{ADB} - \mathcal{A}_{BEC} - \mathcal{A}_{CFA}$$

allineamento di tre punti



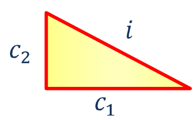
per verificare se tre punti A,B,C sono allineati cioè se *appartengono alla stessa retta* si può:

1. calcolare l'area del triangolo di vertici A,B,C: se l'area è uguale a zero i punti sono allineati

oppure:

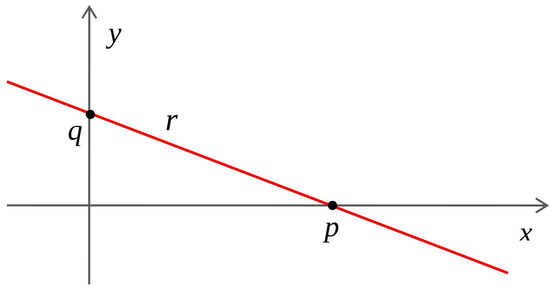
2. calcolare le distanze $AB,\ BC,\ AC$: se $AB + BC = AC$ i punti sono allineati

per stabilire se un triangolo è rettangolo basta verificare che le lunghezze dei lati soddisfano il teorema di Pitagora, cioè che: $\boldsymbol{i^2 = c_1^2 + c_2^2}$



Geometria analitica: la retta

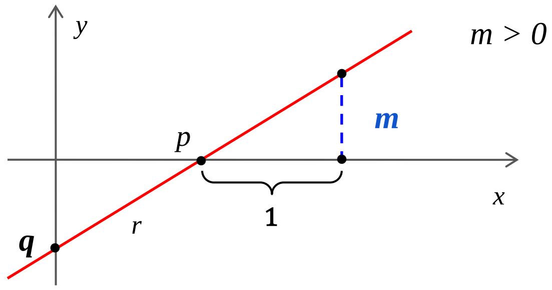
equazione della retta

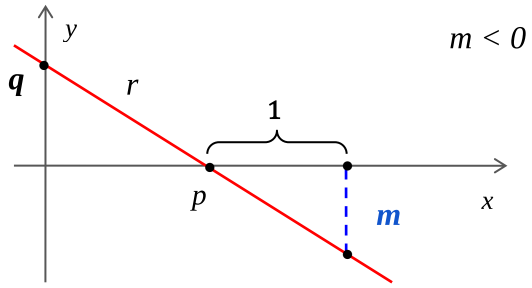


$ax + by + c = 0$	forma implicita
$y = mx + q$	forma esplicita
$\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$	forma segmentaria

nella forma esplicita	nella forma segmentaria
• m è detto coefficiente angolare $m = -\dfrac{a}{b}$	• p è il punto di intersezione tra la retta e l'asse x
• q è il punto di intersezione tra la retta e l'asse y $q = -\dfrac{c}{b}$	• q è il punto di intersezione tra la retta e l'asse y

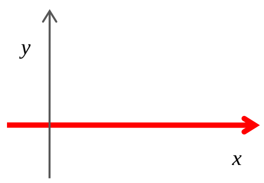
significato geometrico di **m** di **p** e di **q**





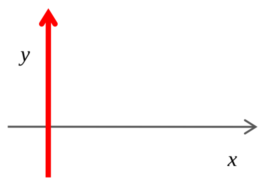
il coefficiente angolare m è l'ordinata del punto che ha distanza di 1 unità dal punto P di intersezione di r con l'asse x

rette particolari



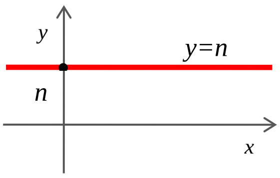
equazione asse x

$$y = 0$$



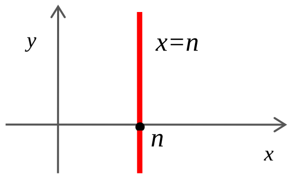
equazione asse y

$$x = 0$$



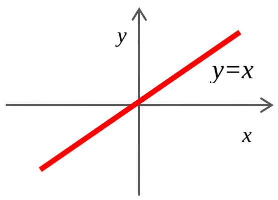
equazione retta parallela all'asse x

$$y = n$$



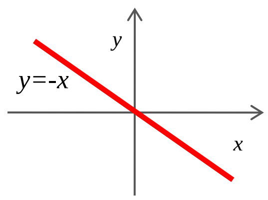
equazione retta parallela all'asse y

$$x = n$$



equazione della bisettrice del I e III quadrante

$$y = x$$



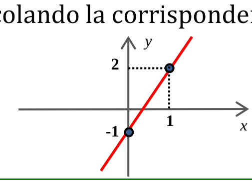
equazione della bisettrice del II e IV quadrante

$$y = -x$$

Per disegnare una retta basta trovare le coordinate di almeno due punti e congiungerli.
Le coordinate di un punto si trovano assegnando alla x un valore a piacere e calcolando la corrispondente y

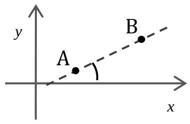
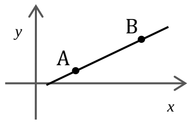
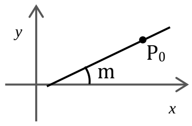
Disegnamo ad esempio la retta
$$y = 3x - 1$$

x	y
0	-1
1	2



Geometria analitica: la retta

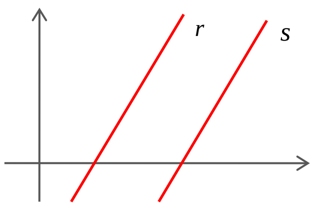
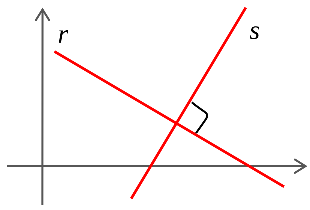
ricerca dell'equazione di una retta

$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$		formula per trovare il coefficiente angolare della retta passante per due punti $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$
$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$		formula per trovare l'equazione della retta passante per due punti $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$
$$y-y_0=m(x-x_0)$$		formula per trovare l'equazione della retta noto un punto $P_0(x_0,y_0)$ ed il coefficiente angolare m **equazione del fascio di rette**

per trovare l'equazione di una retta passante per due punti $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ si può anche:

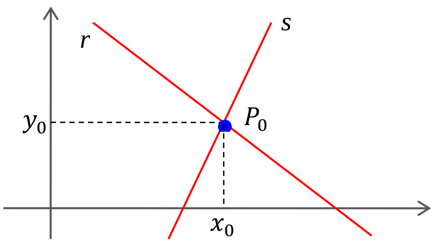
- calcolare il coefficiente angolare m_{AB} con la formula precedente
- utilizzare la formula dell'equazione del fascio di rette sostituendo ad m il valore m_{AB} ed a x_0,y_0 le coordinate di uno qualsiasi dei due punti A o B

condizione di parallelismo e perpendicolarità tra due rette

	$$m_r=m_s$$ due rette parallele hanno i coefficienti angolari uguali		$$m_r=-\frac{1}{m_s}$$ due rette perpendicolari hanno i coefficienti angolari antireciproci

punto e retta

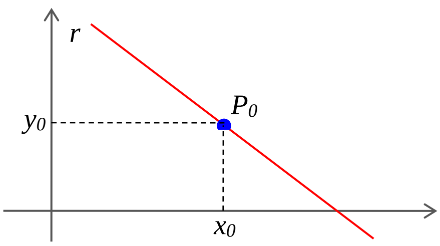
ricerca del punto P_0 di intersezione di due rette non parallele



per trovare le coordinate del punto $P_0(x_0,y_0)$ di intersezione di due rette r ed s non parallele:

- si mettono a sistema le equazioni delle due rette $\begin{cases} r \\ s \end{cases}$
- si risolve il sistema
- le soluzioni x_0 , y_0 del sistema rappresentano le coordinate del punto di intersezione P_0

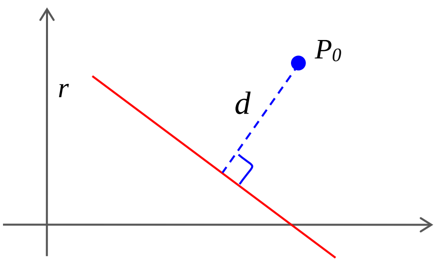
condizione di appartenenza di un punto $P_0(x_0,y_0)$ ad una retta



per verificare se un punto $P_0(x_0,y_0)$ appartiene ad una retta:

- si sostituiscono le coordinate x_0,y_0 del punto alla x e alla y nell'equazione della retta
- si sviluppano i calcoli
- se si ottiene una identità, il punto appartiene alla retta

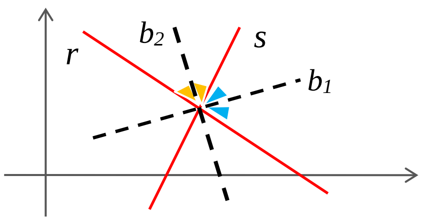
distanza di un punto $P_0(x_0,y_0)$ da una retta r



$$d=\frac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$$	formula con l'equazione della retta in forma implicita $ax+by+c=0$
$$d=\frac{\lvert y_0-mx_0-q\rvert}{\sqrt{m^2+1}}$$	formula con l'equazione della retta in forma esplicita $y=mx+q$

Geometria analitica: la retta

equazione delle bisettrici degli angoli formati da due rette r ed s (non parallele)



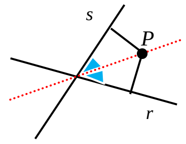
note le equazioni delle rette r ed s in forma implicita

r: $a_1x + b_1y + c_1$ ed s: $a_2x + b_2y + c_2$

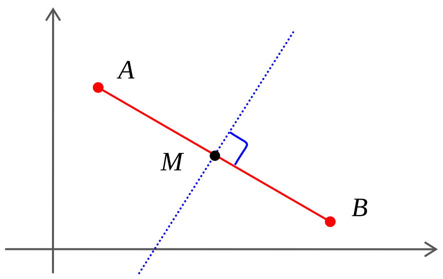
$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

qualunque siano gli angoli formati dalle due rette, le bisettrici sono sempre perpendicolari tra loro

la bisettrice di un angolo è l'insieme dei punti del piano equidistanti dai lati. Sfruttando questa sua proprietà si può trovare l'equazione delle bisettrici ponendo $P_r = P_s$.
Calcolando le distanze e sviluppando i calcoli si ottengono le equazioni delle bisettrici.



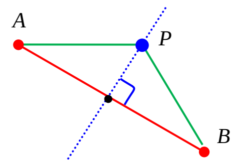
equazione dell'asse di un segmento AB



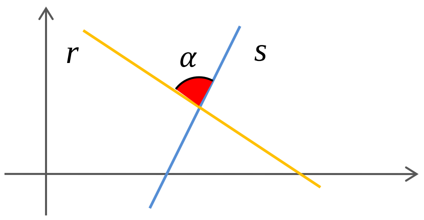
per trovare l'equazione dell'asse di un segmento AB noti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$:

- si calcola il punto medio $M(x_M, y_M)$ del segmento AB
- si calcola il coefficiente angolare m_{AB} del segmento AB
- si ricava il coefficiente angolare dell'asse (è perpendicolare ad AB) $m_{ASSE} = -1/m_{AB}$
- nell'equazione del fascio $y - y_0 = m(x - x_0)$, si sostituisce ad m il valore m_{ASSE} e alle coordinate x_0, y_0 quelle del punto medio x_M, y_M ottenendo così l'equazione dell'asse

l'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi.
Sfruttando questa sua proprietà si può trovare l'equazione dell'asse ponendo $PA = PB$.
Calcolando le distanze e sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione dell'asse del segmento



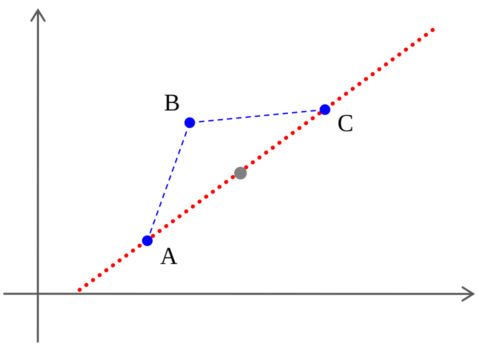
tangente dell'angolo formato da due rette



la tangente dell'angolo α formato da due rette non parallele r ed s di coefficiente angolare m_r ed m_s è dato dalla formula:

$$tg\,\alpha = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}$$

allineamento di tre punti A, B, C



per verificare se tre punti *A, B, C* sono allineati cioè se appartengono alla stessa retta si può:

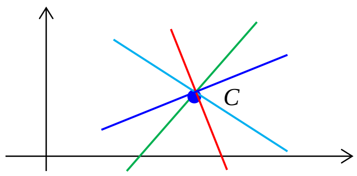
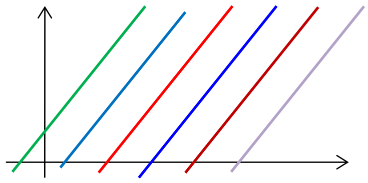
- ricavare m_{AB} ed m_{BC} , e verificare che $m_{AB} = m_{BC}$
- trovare l'equazione della retta passante per A e C e verificare che B appartiene alla retta AC
- calcolare l'area del triangolo di vertici ABC e verificare che sia uguale a zero
- trovare le equazioni delle rette passanti per A e B e per A e C, e verificare che queste sono uguali
- trovare l'equazione della retta passante per A e C e verificare che la distanza di B da tale retta è zero
- verificare che la somma delle distanze AB e BC è uguale alla distanza AC cioè AB + BC = AC

Geometria analitica: la retta

fasci di rette

Un *fascio di rette* è l'insieme delle rette del piano aventi in comune un **punto** oppure una **direzione**

tipi di fasci

fascio proprio	fascio improprio
	
è l'insieme delle rette del piano passanti per uno stesso **punto** C detto *centro del fascio*	è l'insieme delle rette del piano aventi una **direzione** comune, cioè aventi lo stesso coefficiente angolare

come si presenta l'equazione di un fascio

l'equazione di un fascio di rette si presenta come quella di una retta (generalmente in forma implicita) nella quale compare, oltre alle incognite x ed y, almeno una volta anche un'altra lettera (k, h, t, m, p ...) detta *parametro*

Esempio: $2kx - 3y + 5 = 0$ $\qquad$ $3(2t-1)x + (2t-1)y + 3t - 5 = 0$

classificazione di un fascio di rette

data l'equazione del fascio, per classificarlo bisogna:

- calcolare il coefficiente angolare $m = -\frac{a}{b}$
- se m contiene il parametro k il fascio è proprio
- se il parametro si semplifica, il fascio è improprio

esempio per un fascio di rette proprio	esempio per un fascio di rette improprio
$2kx - (3k-1)y - 5 = 0 \ \rightarrow \ m = \dfrac{2k}{(3k-1)}$	$3(2k-1)x + (2k-1)y + 3 = 0 \ \rightarrow \ m = -3\dfrac{(2k-1)}{(2k-1)} = -3$

rette generatrici di un fascio

- le rette generatrici di un fascio sono le rette che danno origine al fascio e sono sempre due
- nel caso di fascio proprio le rette generatrici sono *incidenti*
- nel caso di fascio improprio le rette generatrici sono *parallele*

ricerca delle equazioni delle rette generatrici di un fascio

$(3k+1)x - (k-1)y - 5k - 3 = 0$	• dato il fascio di rette, si sviluppano i calcoli
$k\ \underbrace{(\mathbf{3x - y - 5})}_{\text{retta all'infinito}} + \underbrace{\mathbf{x + y - 3}}_{\text{retta per } k = 0} = 0$	• si raccoglie a fattor comune il parametro k • le due parti così ottenute rappresentano le equazioni delle rette generatrici del fascio

ricerca del centro $C(x_0, y_0)$ di un fascio proprio di rette

$\begin{cases} equazione\ di\ r \\ equazione\ di\ s \end{cases} \ \rightarrow \ x_0\,, y_0 \ \rightarrow \ C(x_0, y_0)$	• si mettono a sistema le equazioni delle due rette generatrici o di due generiche rette del fascio • le soluzioni del sistema rappresentano le coordinate del centro del fascio $C(x_0, y_0)$

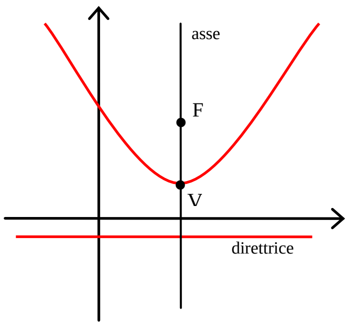
come scrivere l'equazione di un fascio di rette

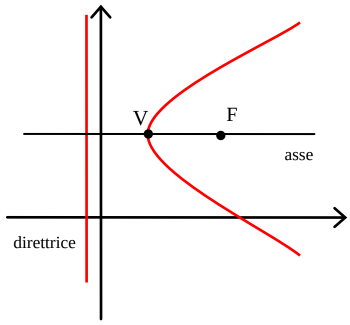
$k\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} = 0$	equazione del **fascio** di rette date le due **rette generatrici** $\boldsymbol{r}$ ed $\boldsymbol{s}$
$y - \boldsymbol{y_0} = m(x - \boldsymbol{x_0})$	equazione del fascio di rette **proprio** noto il **centro** $C(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$
$y = \boldsymbol{m}x + q$	equazione del fascio di rette **improprio** noto il **coefficiente angolare** $\boldsymbol{m}$

Parabola

definizione

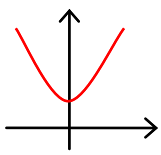
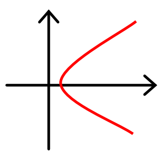
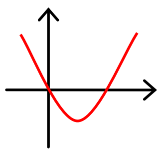
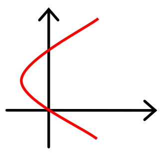
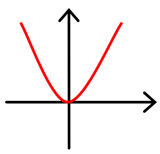
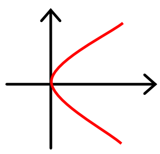
La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso F detto fuoco e da una retta data d detta direttrice, cioè: $\overline{PF} = \overline{Pd}$





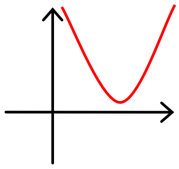
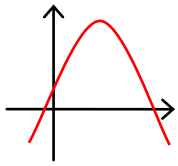
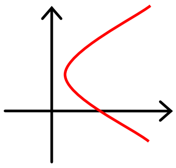
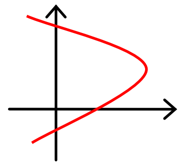
parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y	parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x
equazione completa	
$y = ax^2 + bx + c$	$x = ay^2 + by + c$
coordinate del vertice	
$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ $\Delta = b^2 - 4ac$	$V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$ $\Delta = b^2 - 4ac$
coordinate del fuoco	
$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$	$F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$
equazione dell'asse	
$x = -\frac{b}{2a}$	$y = -\frac{b}{2a}$
equazione della direttrice	
$y = \frac{-1-\Delta}{4a}$	$x = \frac{-1-\Delta}{4a}$

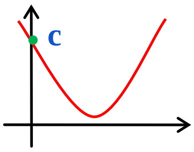
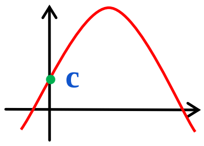
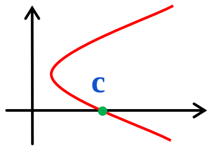
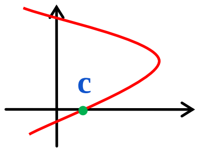
parabole particolari

Se $b = 0$ la parabola ha il vertice sull'asse y $y = ax^2 + c$		Se $b = 0$ la parabola ha il vertice sull'asse x $x = ay^2 + c$	
Se $c = 0$ la parabola passa per l'origine $y = ax^2 + bx$		Se $c = 0$ la parabola passa per l'origine $x = ay^2 + by$	
Se $b = 0$ e $c = 0$ la parabola ha il vertice nell'origine $y = ax^2$		Se $b = 0$ e $c = 0$ la parabola ha il vertice nell'origine $x = ay^2$	

osserva che se $a = 0$ la parabola degenera in una retta

Parabola

significato grafico del coefficiente $\boldsymbol{a}$			
			
$\boldsymbol{a} > 0$	$\boldsymbol{a} < 0$	$\boldsymbol{a} > 0$	$\boldsymbol{a} < 0$

significato grafico del coefficiente $\boldsymbol{c}$			
			
il coefficiente $\boldsymbol{c}$ rappresenta il passaggio della curva sull'asse y (sull'asse x)			

ricerca dell'equazione di una parabola

equazione della parabola noto il fuoco $F(x_F; y_F)$ e la direttrice $y = y_d$	
$\overline{PF} = \overline{Pd}$	• si scrive la definizione di parabola
$\sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} = \lvert y - y_d \rvert$	• si calcolano le due distanze
$(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 = (y - y_d)^2$	• si elevano al quadrato entrambi i membri
$y = ax^2 + bx + c$	• si sviluppano i calcoli e si ottiene l'equazione della parabola

equazione della parabola passante per tre punti $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ $C(x_3, y_3)$	
$y_1 = a{x_1}^2 + bx_1 + c$ *passaggio per A* $y_2 = a{x_2}^2 + bx_2 + c$ *passaggio per B* $y_3 = a{x_3}^2 + bx_3 + c$ *passaggio per C*	• si sostituiscono uno alla volta le coordinate dei punti nell'equazione generica della parabola $y = ax^2 + bx + c$
$\begin{cases} y_1 = a{x_1}^2 + bx_1 + c \\ y_2 = a{x_2}^2 + bx_2 + c \\ y_3 = a{x_3}^2 + bx_3 + c \end{cases}$	• si ottiene un sistema di tre equazioni nelle incognite a, b, c • si risolve il sistema e si ottengono i valori a, b, c
$y = ax^2 + bx + c$	• si sostituiscono i valori ottenuti nell'equazione della parabola ottenendo l'equazione richiesta

in generale

per trovare l'equazione di una parabola è necessario:

- avere tre condizioni (scelte tra: fuoco, vertice, asse, direttrice, passaggio per un punto, retta tangente)
- trasformare ogni condizione in una equazione
- ottenere il sistema delle tre equazioni nelle incognite a, b, c
- risolvere il sistema e trovare i valori di a, b, c
- sostituire i valori ottenuti nell'equazione della parabola, ottenendo l'equazione cercata

Parabola

ricorda che nel caso in cui è noto il vertice, è vantaggioso sfruttare le seguenti due condizioni:

- passaggio della parabola per il punto Vertice
- porre $-\frac{b}{2a}$ *uguale alla coordinata del vertice nota*

Non conviene utilizzare la coordinata $-\frac{\Delta}{4a}$ del vertice perché questa condizione genera una equazione di II grado

ricerca delle equazioni delle rette tangenti alla parabola

equazioni delle rette tangenti condotte da un punto $P_0(x_0, y_0)$ <u>esterno</u> alla parabola	
$y - y_0 = m(x - x_0)$	• si scrive l'equazione del fascio di rette proprio di centro $P_0(x_0, y_0)$
$y = y_0 + m(x - x_0)$	• si ricava la y dell'equazione del fascio
$y_0 + m(x - x_0) = ax^2 + bx + c$	• si sostituisce la y trovata nell'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$
$ax^2 + (b - m)x + mx_0 - y_0 + c = 0$	• si ordina l'equazione rispetto alla x
$(b - m)^2 - 4a(mx_0 - y_0 + c) = 0$	• si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0 (condizione di tangenza tra retta e parabola)
$y - y_0 = m_1(x - x_0)$ $y - y_0 = m_2(x - x_0)$	• si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita m ricavando i valori m_1 ed m_2 • si sostituiscono m_1 ed m_2 nell'equazione del fascio ottenendo le equazioni delle rette tangenti

equazione della retta tangente nel punto $P_0(x_0, y_0)$ della parabola: <u>formula di sdoppiamento</u>	
$y = ax^2 + bx + c$	• si scrive l'equazione della parabola • si pone $x^2 = x_0 \cdot x$ $\quad (y^2 = y_0 \cdot y)$ • si pone $x = \frac{x_0+x}{2}$ e $y = \frac{y_0+y}{2}$
$\frac{y_0 + y}{2} = ax_0 \cdot x + b\frac{x_0 + x}{2} + c$	• si sostituiscono le incognite sdoppiate nella equazione della parabola • sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione della retta tangente nel punto $P_0(x_0, y_0)$

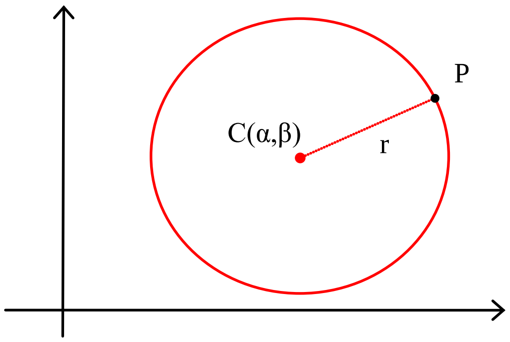
equazione della retta tangente con coefficiente angolare m <u>assegnato</u>	
$y = mx + q$	• si scrive l'equazione del fascio di rette improprio con a m assegnato
$mx + q = ax^2 + bx + c$	• si sostituisce la y nell'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$
$ax^2 + (b - m)x + c - q = 0$	• si ordina l'equazione rispetto alla x
$(b - m)^2 - 4a(c - q) = 0$	• si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0 (condizione di tangenza tra retta e parabola)
$y = mx + q$	• si risolve l'equazione ottenuta nell'incognita q • si sostituisce il valore di q nell'equazione del fascio ottenendo l'equazione della retta tangente

in alcuni problemi $\boldsymbol{m}$ si ricava nota la retta parallela o perpendicolare alla retta tangente

Circonferenza

definizione

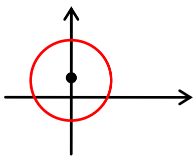
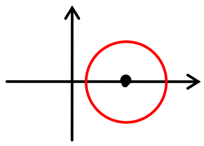
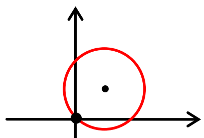
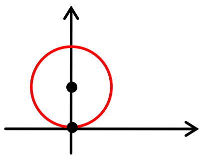
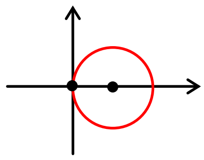
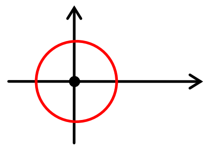
La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso C detto centro, cioè: $\overline{PC} = r$



$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$	equazione circonferenza
$C(\alpha;\beta)$ $\quad \alpha = -\dfrac{a}{2} \quad \beta = -\dfrac{b}{2}$	coordinate del centro
$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c}$	relazione per il raggio
$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$	equazione della circonferenza di centro $C(\alpha,\beta)$ e raggio r

affinché la circonferenza sia reale è necessario che : $\alpha^2 + \beta^2 - c \geq 0$

circonferenze particolari

		
se $a = 0$ la circonferenza ha centro sull'asse y	se $b = 0$ la circonferenza ha centro sull'asse x	se $c = 0$ la circonferenza passa per l'origine
		
se $a = 0$ e $c = 0$ la circonferenza ha centro sull'asse y e passa per l'origine	se $b = 0$ e $c = 0$ la circonferenza ha centro sull'asse x e passa per l'origine	se $a = 0$ e $b = 0$ la circonferenza ha centro nell'origine

osserva che se $a = b = c = 0$ la circonferenza degenera nel punto O(0,0) origine degli assi cartesiani

ricerca dell'equazione di una circonferenza

per scrivere l'equazione di una circonferenza è necessario avere **tre** condizioni, scelte tra:

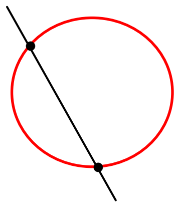
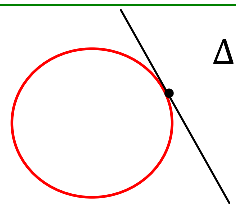
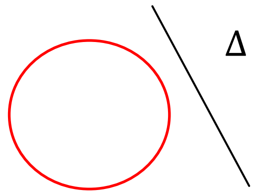
centro	raggio	passaggio per un punto	retta tangente

metodo algebrico	metodo geometrico
• trasformare ogni condizione in una equazione • ottenere il sistema delle tre equazioni nelle incognite a, b, c • risolvere il sistema e trovare i valori di a, b, c • sostituire i valori ottenuti nell'equazione della circonferenza, ottenendo l'equazione cercata	• è utile rappresentare sul piano cartesiano le condizioni note • ricavare da queste, centro e raggio della circonferenza

Circonferenza

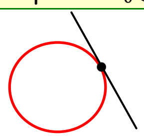
Esempio: equazione della circonferenza passante per tre punti $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ $C(x_3,y_3)$ (metodo algebrico)	
$x_1{}^2+y_1{}^2+ax_1+by_1+c=0$ *passaggio per A* $x_2{}^2+y_2{}^2+ax_2+by_2+c=0$ *passaggio per B* $x_3{}^2+y_3{}^2+ax_3+by_3+c=0$ *passaggio per C*	• si sostituiscono uno alla volta le coordinate dei punti nell'equazione generica della circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$
$\begin{cases} x_1{}^2+y_1{}^2+ax_1+by_1+c=0 \\ x_2{}^2+y_2{}^2+ax_2+by_2+c=0 \\ x_3{}^2+y_3{}^2+ax_3+by_3+c=0 \end{cases}$	• si ottiene un sistema di tre equazioni nelle incognite a, b, c • si risolve il sistema e si ottengono i valori a, b, c
$x^2+y^2+ax+by+c=0$	• si sostituiscono i valori ottenuti nell'equazione della circonferenza ottenendo l'equazione richiesta

posizione di una retta rispetto alla circonferenza

 $\Delta>0$	 $\Delta=0$	 $\Delta<0$
retta secante	retta tangente	retta esterna
$x_1\neq x_2$ soluzioni reali e distinte	$x_1=x_2$ soluzioni reali e coincidenti	$\emptyset$ soluzioni non reali

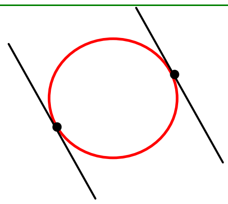
ricerca delle equazioni delle rette tangenti alla circonferenza

equazioni delle rette tangenti condotte da un punto $P_0(x_0,y_0)$ **esterno** alla circonferenza	
$y-y_0=m(x-x_0)$	• si scrive l'equazione del fascio di rette proprio di centro $P_0(x_0,y_0)$
$y=y_0+m(x-x_0)$	• si ricava la y dell'equazione del fascio
$\dfrac{\lvert m(\alpha-x_0)-\beta+y_0\rvert}{\sqrt{m^2+1}}=r$	• si utilizza la formula della distanza di un punto da una retta in <u>forma esplicita</u> • si impone che la distanza tra il centro $C(\alpha;\beta)$ della circonferenza e il fascio di rette sia uguale ad r
$\dfrac{[m(\alpha-x_0)-\beta+y_0]^2}{m^2+1}=r^2$	• si elevano al quadrato entrambi i membri • si calcola il minimo comune multiplo • si sviluppano i calcoli
$y-y_0=m_1(x-x_0)$ $y-y_0=m_2(x-x_0)$	• si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita m ottenendo i valori m_1 ed m_2 • si sostituiscono m_1 ed m_2 nell'equazione del fascio ottenendo le equazioni delle rette tangenti
Le equazioni delle rette tangenti condotte da un punto $P_0(x_0,y_0)$ esterno alla circonferenza si possono ottenere anche utilizzando il procedimento illustrato per le altre coniche	

equazione della retta tangente in un punto $P_0(x_0,y_0)$ **della** circonferenza: <u>formula di sdoppiamento</u>		
$x^2+y^2+ax+by+c=0$		• si scrive l'equazione della circonferenza • si pone $\boldsymbol{x^2=x_0x}$ e $\boldsymbol{y^2=y_0y}$ • si pone $\boldsymbol{x}=\frac{x_0+x}{2}$ e $\boldsymbol{y}=\frac{y_0+y}{2}$
$x_0\cdot x+y_0\cdot y+a\dfrac{x_0+x}{2}+b\dfrac{y_0+y}{2}+c=0$		• si sostituiscono le incognite sdoppiate nella equazione della circonferenza • sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione della retta tangente nel punto $P_0(x_0,y_0)$

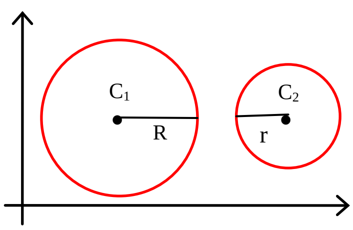
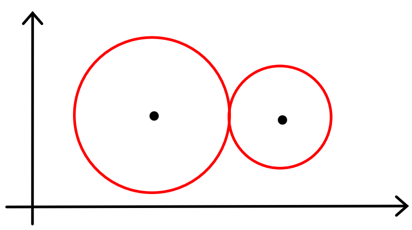
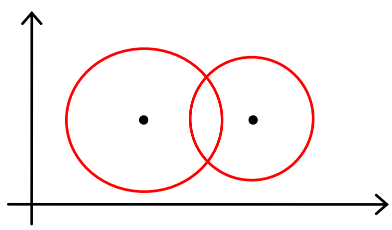
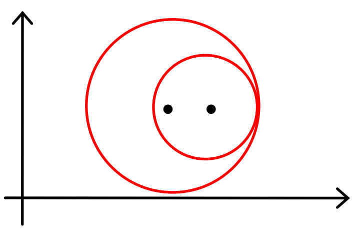
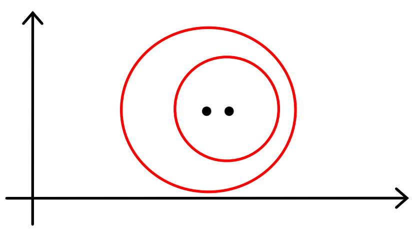
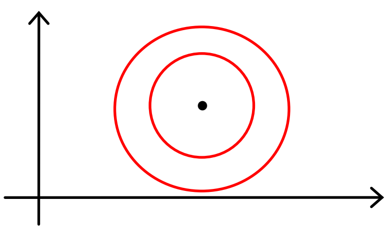
Circonferenza

equazione delle rette tangenti parallele ad una retta data

$y = \boldsymbol{m}x + q$	• si scrive l'equazione del fascio di rette improprio con $\boldsymbol{m}$ assegnato
$x^2 + (mx+q)^2 + ax + b(mx+q) + c = 0$	• si sostituisce la y nell'equazione della circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ • si sviluppano i calcoli, ordinando l'equazione rispetto alla x
$y = mx + q_1$ $y = mx + q_2$ 	• si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0 (condizione di tangenza tra retta e circonferenza) • si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita q • si sostituiscono q_1 e q_2 nell'equazione iniziale del fascio ottenendo le equazioni della rette tangenti

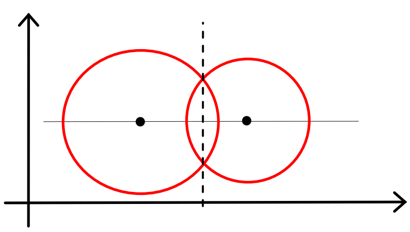
in alcuni problemi il coefficiente angolare $\boldsymbol{m}$ si ricava nota la retta parallela o la perpendicolare alla retta tangente

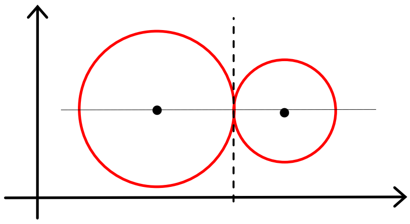
posizioni reciproche di due circonferenze

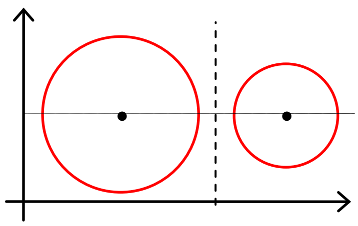
		
$C_1C_2 > R + r$ circonferenze esterne	$C_1C_2 = R + r$ circonferenze tangenti esterne	$R - r < C_1C_2 < R + r$ circonferenze secanti
		
$C_1C_2 = R - r$ circonferenze tangenti interne	$C_1C_2 < R - r$ circonferenze interne	$C_1C_2 = 0$ circonferenze concentriche

asse radicale di due circonferenze

L'asse radicale di due circonferenze non concentriche è la retta del piano, luogo geometrico dei punti aventi la stessa **potenza** rispetto ai centri delle due circonferenze







osservazioni

l'asse radicale è sempre ortogonale al segmento $\overline{C_1C_2}$ che unisce i centri delle due circonferenze. Inoltre:

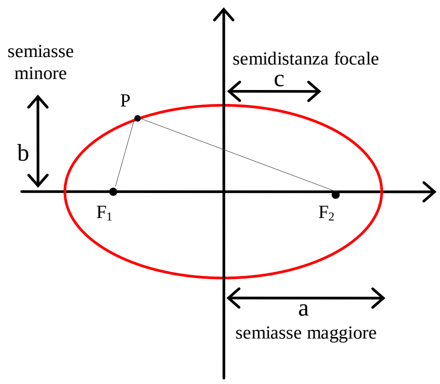
- se le due circonferenze sono **secanti**, l'asse radicale è alla retta passante per i due punti di intersezione
- se le circonferenze sono **tangenti,** l'asse radicale è la retta tangente alle due circonferenze nel punto comune

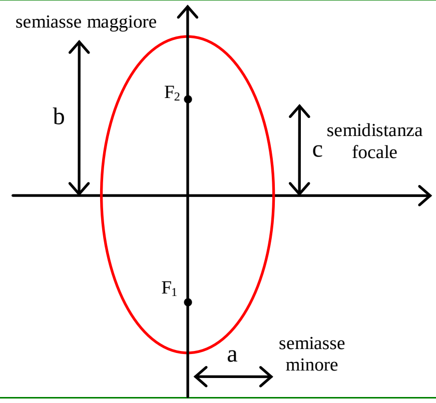
l'asse radicale consente di trovare gli eventuali punti di intersezione tra due circonferenze mettendo a sistema l'equazione dell'asse stesso con l'equazione di una delle due circonferenze

Ellisse

definizione

L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano tali che la somma delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 detti fuochi è costante, cioè: $\boldsymbol{PF_1 + PF_2 = costante}$





ellisse di centro l'origine e fuochi sull'asse delle x	ellisse di centro l'origine e fuochi sull'asse delle y
$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$	$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b$

equazione canonica

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad a > b$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad a < b$

lunghezza asse maggiore, lunghezza asse minore e distanza focale

$2a$	$2b$	$2c$	$2b$	$2a$	$2c$

relazione tra i parametri a, b, c

$a^2 = b^2 + c^2$	$b^2 = a^2 - c^2$ $c^2 = a^2 - b^2$	$b^2 = a^2 + c^2$	$a^2 = b^2 - c^2$ $c^2 = b^2 - a^2$

coordinate dei fuochi

$F_1(-c;\ 0)$	$F_2(c;\ 0)$	$F_1(0; -c)$	$F_2(0; c)$

eccentricità

$e = \dfrac{c}{a}$	$0 < e < 1$	$e = \dfrac{c}{b}$	$0 < e < 1$

se $a = b$ l'ellisse degenera in una circonferenza di centro l'origine e raggio a di equazione $x^2 + y^2 = a^2$

ricerca dell'equazione di una ellisse

equazione dell'ellisse noti i fuochi ed il semiasse maggiore

$PF_1 + PF_2 = 2a$	• si applica la definizione di ellisse ricordando che la costante è uguale a $2a$
$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$	• si calcolano le due distanze PF_1 e PF_2
$(x+c)^2 + y^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$	• si isola il primo radicale e si elevano al quadrato entrambi i membri
$\left[a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}\right]^2 = (a^2 - cx)^2$	• si sviluppano i calcoli isolando il radicale rimasto e di nuovo si elevano al quadrato entrambi i membri
$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$	• si sviluppano i calcoli e si ottiene l'equazione dell'ellisse in forma non canonica

Ellisse

equazione dell'ellisse passante per due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$	
$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$	• nell'equazione dell'ellisse in forma canonica si sostituiscono $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a^2}} = \boldsymbol{\alpha}$ e $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b^2}} = \boldsymbol{\beta}$
$\alpha {x_1}^2 + \beta {y_1}^2 = 1$ *passaggio per A* $\alpha {x_2}^2 + \beta {y_2}^2 = 1$ *passaggio per B*	• si sostituiscono uno alla volta le coordinate dei punti nell'equazione precedente
$\begin{cases} \alpha {x_1}^2 + \beta {y_1}^2 = 1 \\ \alpha {x_2}^2 + \beta {y_2}^2 = 1 \end{cases}$	• si risolve il sistema di primo grado nelle incognite α e β
$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$	• si sostituiscono i valori ottenuti nell'equazione iniziale ottenendo così l'equazione richiesta

in generale

per trovare l'equazione di una ellisse è necessario:

- avere due condizioni (scelte tra: fuoco, semiassi, passaggio per un punto, eccentricità, retta tangente)
- trasformare ogni condizione in una equazione
- ottenere il sistema delle due equazioni nelle incognite a^2 e b^2
- risolvere il sistema e trovare i valori di a^2 e b^2
- sostituire i valori ottenuti nell'equazione dell'ellisse, ottenendo l'equazione cercata

nota che nella ricerca dell'equazione dell'ellisse:

- le incognite sono a^2 e b^2 **e non** a e b
- conviene imporre le condizioni date a partire dall'equazione dell'ellisse in forma non canonica $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

ricerca delle equazioni delle rette tangenti all'ellisse

equazioni delle rette tangenti condotte da un punto $P_0(x_0, y_0)$ **esterno** all'ellisse	
$y - y_0 = m(x - x_0)$	• si scrive l'equazione del fascio di rette proprio di centro $P_0(x_0, y_0)$
$y = y_0 + m(x - x_0)$	• si ricava la y dell'equazione del fascio
$b^2x^2 + a^2[y_0 + m(x - x_0)]^2 = a^2b^2$	• si sostituisce la y nell'equazione dell'ellisse in forma non canonica $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
$y - y_0 = m_1(x - x_0)$ $y - y_0 = m_2(x - x_0)$	• si sviluppano i calcoli e si ordina l'equazione rispetto alla x • si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0 (condizione di tangenza tra retta ed ellisse) • si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita m ricavando i valori m_1 ed m_2 • si sostituiscono m_1 ed m_2 nell'equazione del fascio ottenendo le equazioni delle rette tangenti

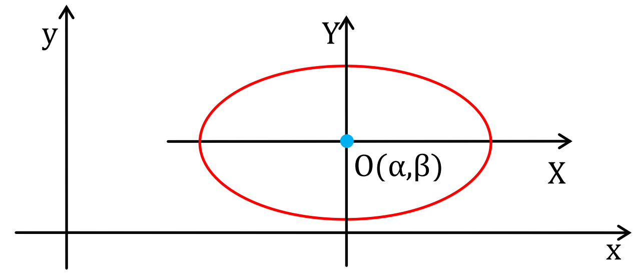
equazione della retta tangente nel punto $P_0(x_0, y_0)$ **dell'**ellisse: <u>formula di sdoppiamento</u>	
$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$	• si scrive l'equazione dell'ellisse in forma non canonica • si pone $\boldsymbol{x^2 = x_0 \cdot x}$ e $\boldsymbol{y^2 = y_0 \cdot y}$
$b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$	• si sostituiscono le incognite sdoppiate nella equazione dell'ellisse • sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione della retta tangente nel punto $P_0(x_0, y_0)$

Ellisse

equazione delle rette tangenti di coefficiente angolare **m** assegnato	
$y = \boldsymbol{m}x + q$	• si scrive l'equazione del fascio di rette improprio con **m** assegnato
$b^2x^2 + a^2[mx + q]^2 = a^2b^2$	• si sostituisce la y nell'equazione dell'ellisse in forma non canonica $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
$y = mx + q_1$ $y = mx + q_2$	• si sviluppano i calcoli e si ordina l'equazione rispetto alla x • si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0 (condizione di tangenza tra retta ed ellisse) • si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita q ricavando i valori di q_1 e q_2 • si sostituiscono q_1 e q_2 nell'equazione iniziale del fascio ottenendo le equazioni delle rette tangenti
in alcuni problemi $\boldsymbol{m}$ si ricava nota la retta parallela o perpendicolare alla retta tangente	

ellisse traslata

l'ellisse si dice traslata se gli assi X e Y del suo sistema di riferimento sono paralleli agli assi cartesiani x e y



$\boldsymbol{O(\alpha, \beta)}$	coordinate del centro dell'ellisse
$\dfrac{(\boldsymbol{x - \alpha})^2}{\boldsymbol{a^2}} + \dfrac{(\boldsymbol{y - \beta})^2}{\boldsymbol{b^2}} = \boldsymbol{1}$	equazione dell'ellisse riferita al sistema XOY

ricerca dell'equazione dell'ellisse traslata note le coordinate del centro $O(\alpha, \beta)$	
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	• data l'equazione dell'ellisse in forma canonica
$\dfrac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$	• si sostituisce a $\boldsymbol{x \to x - \alpha}$ e a $\boldsymbol{y \to y - \beta}$ (traslazione di centro $O(\alpha, \beta)$) • si sviluppano i calcoli e si ottiene l'equazione dell'ellisse traslata

area e lunghezza di una ellisse

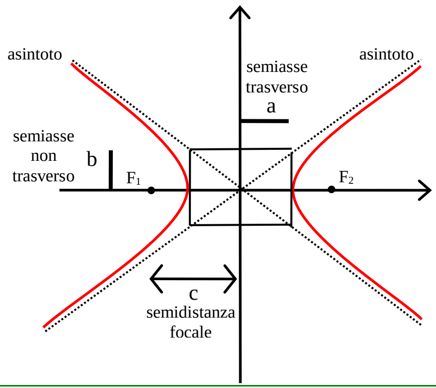
misura dell'area	
$\boldsymbol{\mathcal{A} = \pi ab}$	osserva che se $a = b$ l'ellisse diventa una circonferenza e la formula si riduce a quella dell'area del cerchio $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\pi r^2}$

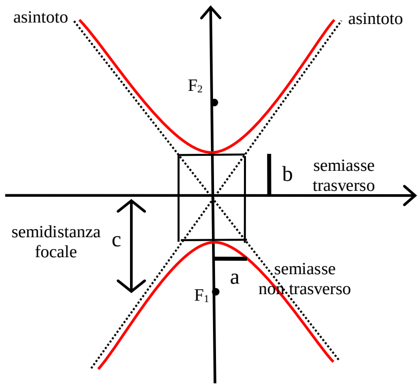
misura della lunghezza	
$\boldsymbol{l = \pi \left[3(a + b) - \sqrt{(3a + b)(a + 3b)}\right]}$	osserva che la lunghezza si calcola solo come sviluppo in serie di un integrale curvilineo. Un buon valore approssimato è dato dalla formula qui riportata del matematico indiano Ramanujan

Iperbole

definizione

L'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano tali che la differenza in valore assoluto delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 detti fuochi è costante, cioè: $\boldsymbol{|PF_1 - PF_2| = costante}$





iperbole con i fuochi sull'asse delle x	iperbole con i fuochi sull'asse delle y
$\lvert\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\rvert = 2a$	$\lvert\overline{PF_1} + \overline{PF_2}\rvert = 2b$

equazione canonica

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$

lunghezza asse trasverso, lunghezza asse non trasverso e distanza focale

$2a$	$2b$	$2c$	$2b$	$2a$	$2c$

relazione tra i parametri a, b, c

$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$

coordinate dei fuochi

$F_1(-c;\ 0)$ $\quad$ $F_2(c;\ 0)$	$F_1(0; -c)$ $\quad$ $F_2(0\,; c)$

equazioni degli asintoti

$y = -\dfrac{b}{a}x$ $\quad$ $y = \dfrac{b}{a}x$	$y = -\dfrac{b}{a}x$ $\quad$ $y = \dfrac{b}{a}x$

eccentricità

$e = \dfrac{c}{a}$ $\quad$ $e > 1$	$e = \dfrac{c}{b}$ $\quad$ $e > 1$

ricerca dell'equazione di una iperbole

equazione dell'iperbole noti i fuochi ed il semiasse trasverso

$\lvert PF_1 - PF_2\rvert = 2a$	• si applica la definizione di iperbole ricordando che la costante è uguale a $2a$
$\left\lvert\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right\rvert = 2a$	• si calcolano le due distanze PF_1 e PF_2
$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = 4a^2$	• si elevano al quadrato entrambi i membri
$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$	• si sviluppano i calcoli e si isola il radicale rimasto • si elevano di nuovo al quadrato entrambi i membri • si sviluppano i calcoli e si ottiene l'equazione dell'iperbole in forma non canonica

Iperbole

equazione dell'iperbole passante per due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$	
$\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$	• nell'equazione dell'iperbole in forma canonica si effettua la sostituzione $\frac{1}{a^2} = \boldsymbol{\alpha}$ e $\frac{1}{b^2} = \boldsymbol{\beta}$
$\alpha {x_1}^2 - \beta {y_1}^2 = 1$ *passaggio per A* $\alpha {x_2}^2 - \beta {y_2}^2 = 1$ *passaggio per B*	• si sostituiscono uno alla volta le coordinate dei punti nell'equazione precedente
$\begin{cases} \alpha {x_1}^2 - \beta {y_1}^2 = 1 \\ \alpha {x_2}^2 - \beta {y_2}^2 = 1 \end{cases}$	• si risolve il sistema di primo grado nelle incognite α e β
$\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$	• si sostituiscono i valori ottenuti nell'equazione iniziale ottenendo così l'equazione richiesta

in generale

per trovare l'equazione di una iperbole è necessario:

- avere due condizioni (scelte tra: fuoco, semiassi, passaggio per un punto, eccentricità, retta tangente)
- trasformare ogni condizione in una equazione
- ottenere il sistema delle due equazioni nelle incognite a^2 *e* b^2
- risolvere il sistema e trovare i valori di a^2 *e* b^2
- sostituire i valori ottenuti nell'equazione dell'iperbole, ottenendo l'equazione cercata

nota che nella ricerca dell'equazione dell'iperbole:

- o le incognite sono a^2 e b^2 **e non** a e b
- o conviene imporre le condizioni date a partire dall'equazione dell'iperbole in forma non canonica $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

ricerca delle equazioni delle rette tangenti all'iperbole

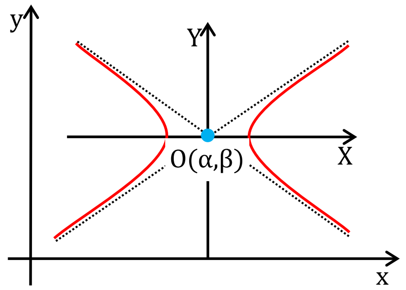
equazioni delle rette tangenti condotte da un punto $P_0(x_0, y_0)$ **esterno** all'iperbole	
$y - y_0 = m(x - x_0)$	• si scrive l'equazione del fascio di rette proprio di centro $P_0(x_0, y_0)$
$y = y_0 + m(x - x_0)$	• si ricava la y dell'equazione del fascio
$b^2x^2 - a^2[y_0 + m(x - x_0)]^2 = a^2b^2$	• si sostituisce la y nell'equazione dell'iperbole in forma non canonica $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$
$y - y_0 = m_1(x - x_0)$ $y - y_0 = m_2(x - x_0)$	• si sviluppano i calcoli e si ordina l'equazione rispetto alla x • si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0 (condizione di tangenza tra retta ed iperbole) • si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita m ricavando i valori m_1 ed m_2 • si sostituiscono m_1 ed m_2 nell'equazione del fascio ottenendo le equazioni delle rette tangenti

equazione della retta tangente nel punto $P_0(x_0, y_0)$ **dell**'iperbole: <u>formula di sdoppiamento</u>	
$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$	• si scrive l'equazione dell'iperbole in forma non canonica • si pone $\boldsymbol{x^2 = x_0 \cdot x}$ e $\boldsymbol{y^2 = y_0 \cdot y}$
$b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$	• si sostituiscono le incognite sdoppiate nella equazione dell'iperbole • sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione della retta tangente nel punto $P_0(x_0, y_0)$

Iperbole

equazione delle rette tangenti di coefficiente angolare **m** assegnato	
$y = \boldsymbol{m}x + q$	• si scrive l'equazione del fascio di rette improprio con **m** assegnato
$b^2x^2 - a^2[mx+q]^2 = a^2b^2$	• si sostituisce la y nell'equazione dell'iperbole in forma non canonica $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$
$y = mx + q_1$ $y = mx + q_2$	• si sviluppano i calcoli e si ordina l'equazione rispetto alla x • si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0 (condizione di tangenza tra retta ed iperbole) • si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita q ricavando i valori di q_1 e q_2 • si sostituiscono q_1 e q_2 nell'equazione iniziale del fascio ottenendo le equazioni delle rette tangenti

in alcuni problemi $\boldsymbol{m}$ si ricava nota la retta parallela o perpendicolare alla retta tangente

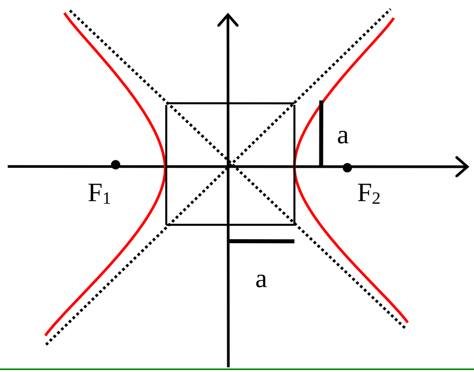
iperbole traslata		
l'iperbole si dice traslata se gli assi X e Y del suo sistema di riferimento sono paralleli agli assi cartesiani x e y		
	$\boldsymbol{O(\alpha,\beta)}$	coordinate del centro dell'iperbole
	$\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$	equazione dell'iper-bole con i fuochi sull'asse x riferita al sistema XOY

ricerca dell'equazione dell'iperbole traslata note le coordinate del centro $O(\alpha,\beta)$	
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	• data l'equazione dell'iperbole in forma canonica
$\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$	• si sostituisce a $\boldsymbol{x \to x - \alpha}$ e a $\boldsymbol{y \to y - \beta}$ (traslazione di centro $O(\alpha,\beta)$) • si sviluppano i calcoli e si ottiene l'equazione dell'iperbole traslata

Iperbole

iperbole equilatera

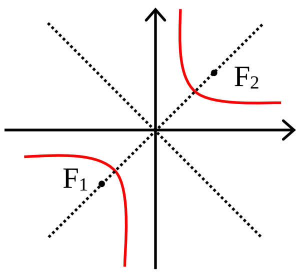
l'iperbole si dice equilatera se i semiassi sono uguali: $a = b$



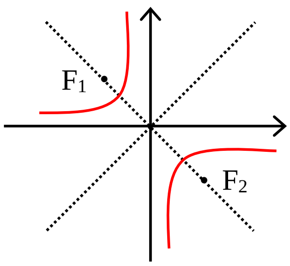
$\boldsymbol{x^2 - y^2 = a^2}$	equazione
$c = a\sqrt{2}$	relazione tra a, c
$F_1(-c;\ 0) \qquad F_2(c;\ 0)$	coordinate dei fuochi
$y = -x \qquad y = x$	equazioni asintoti
$e = \dfrac{c}{a} \qquad e > 1$	eccentricità

osserva che nell'iperbole equilatera gli asintoti coincidono con le bisettrici del I e III e del II e IV quadrante

iperbole equilatera ruotata di $\pm 45°$



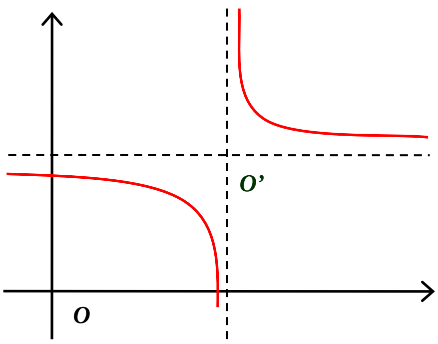
$\boldsymbol{xy = k}$	equazione per $\boldsymbol{k} > 0$
$F_1(-\sqrt{2k}\,; -\sqrt{2k})$	coordinata del primo fuoco
$F_2(\ \sqrt{2k}\,;\ \ \sqrt{2k})$	coordinata del secondo fuoco



$\boldsymbol{xy = k}$	equazione per $\boldsymbol{k} < 0$
$F_1(-\sqrt{-2k}\,; \sqrt{-2k})$	coordinata del primo fuoco
$F_2(\sqrt{-2k}\,; -\sqrt{-2k})$	coordinata del secondo fuoco

funzione omografica

si dice funzione omografica l'iperbole equilatera ruotata di 45° e traslata rispetto all'origine degli assi cartesiani



$\boldsymbol{y = \dfrac{ax + b}{cx + d}} \qquad c \neq 0 \quad ad - bc \neq 0$	equazione
$O'\left(-\dfrac{d}{c};\ \dfrac{a}{c}\right)$	coordinate del centro dell'iperbole O'
$x = -\dfrac{d}{c}$ $y = \dfrac{a}{c}$	equazioni degli asintoti