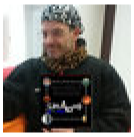
RISORSE DIDATTICHE.



【ResearchGate Project】 *By … 0000-0001-5086-7401 & lnkd.in/erZ48tm*

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

RADICI

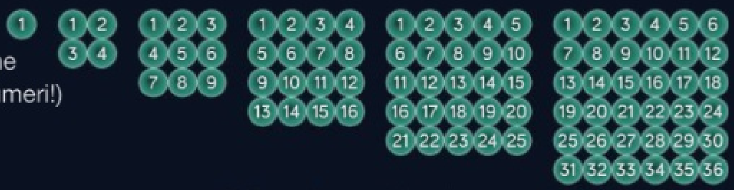
QUADRATE

Primo eBOOK

3 Radici quadrate e quadrati perfetti

PRIMA DI COMINCIARE

Questa figura è una «rappresentazione geometrica» di numeri (solo alcuni numeri!) che si chiamano quadrati perfetti.



> Quale può essere la definizione di *quadrato perfetto*? [Un quadrato perfetto è un numero naturale che può essere espresso come quadrato di un numero naturale.]
> Confronta la tua risposta con quelle dei compagni.

DA SAPERE

Ricorda che:

$25 = 5^2 \qquad 36 = 6^2 \qquad 144 = 12^2 \qquad \dots$

Numeri come **25** **36** **144** sono chiamati *quadrati perfetti*.

Di questi numeri trovi anche facilmente la radice quadrata:

$\sqrt[2]{25} = 5 \qquad \sqrt[2]{36} = 6 \qquad \sqrt[2]{144} = 12$

5, 6 e 12 non sono numeri irrazionali

ANIMAZIONE IN DIGITALE
Radici quadrate e quadrati perfetti

Sono chiamati **quadrati perfetti** i numeri naturali che sono il quadrato di un numero naturale.

Per scoprire se un numero positivo è un quadrato perfetto, verifica che non termini con i numeri 2, 3, 7, 8 o con un numero dispari di zeri.
Guarda infatti i quadrati dei primi 10 numeri naturali (dopo lo 0) a fianco.

I numeri terminano con le cifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; di conseguenza, i loro quadrati possono terminare con 1, 4, 5, 6, 9 o con un numero pari di zeri.

Se un numero termina con 1, 4, 5, 6, 9, dovrai valutare caso per caso.

n	n^2
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

PER ESEMPIO *Non* sono sicuramente quadrati perfetti:

1748 37 000 77 1302.

- 54 termina con 4 e non è un quadrato perfetto;
- 64 termina con 4 ed è un quadrato perfetto.

METTITI ALLA PROVA

1 Segna i numeri che sono dei quadrati perfetti.

15	☐	118	☐	49	☑
25	☑	63	☐	89	☐
35	☐	47	☐	169	☑
55	☐	88	☐	39	☐
125	☐	1000	☐	729	☑

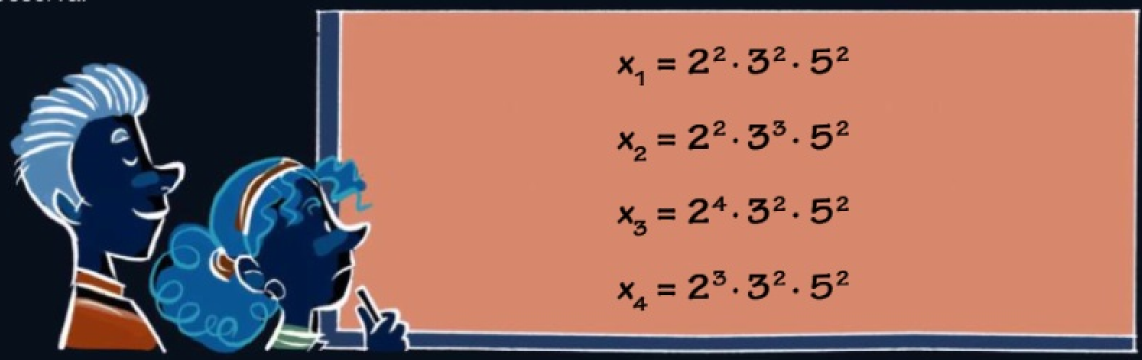
2 Vero o falso?

	V	F
a) 49 è un quadrato perfetto.	☑	F
b) 780 è un quadrato perfetto.	V	☑
c) 0 è un quadrato perfetto.	☑	F
d) 1 è un quadrato perfetto.	☑	F
e) 8 è un quadrato perfetto.	V	☑
f) 12 è un quadrato perfetto.	V	☑

4 Radici quadrate e scomposizione in fattori primi

PRIMA DI COMINCIARE

Osserva:



Pietro sostiene che, anche senza fare i calcoli, già si vede che i numeri x_2 e x_4 non sono quadrati perfetti. Anna invece ha dei dubbi.

> Qual è il tuo parere?
> Discutine con i tuoi compagni.

DA SAPERE

- Puoi scomporre il numero in fattori primi. $60 = (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5)$
- Puoi elevarlo al quadrato elevando al quadrato i suoi fattori. $3600 = (2^2)^2 \cdot (3)^2 \cdot (5)^2$
- Dunque $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

sono tutti esponenti pari, divisibili per 2

e scopri (ovviamente!) che 3600 è un quadrato perfetto.

I quadrati perfetti sono caratterizzati dal fatto che gli esponenti che compaiono nella loro scomposizione in fattori primi sono tutti pari.

Un numero naturale è un **quadrato perfetto** quando nella scomposizione in fattori primi ha come esponenti tutti numeri pari.

ANIMAZIONE IN DIGITALE
Radici quadrate e scomposizione in fattori primi

$3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = (2^{4:2})^2 \cdot (3^{2:2})^2 \cdot (5^{2:2})^2$ perciò

$\sqrt{3600} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

quindi $\sqrt[2]{3600} = 60$.

PER ESEMPIO

7056	2
3528	2
1764	2
882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

$7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$

Quindi 7056 è un quadrato perfetto.

$\sqrt{7056} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

Quindi $\sqrt{7056} = 84$

1125	3
375	3
125	5
25	5
5	5
1	

$1125 = 3^2 \cdot 5^3$

Quindi 1125 non è un quadrato perfetto.

Infatti $\sqrt{1125} = 33{,}541\,019\,662\,496\,845\,446\ldots$

Ricorda che anche 0 e 1 sono quadrati perfetti!

5 Proprietà delle radici quadrate

PRIMA DI COMINCIARE

Osserva i calcoli di Anna e Pietro.

$$\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{100} = 10$$

$$\sqrt{9 \cdot 25} = \sqrt{225} = 15$$

$$\sqrt{144 : 4} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$$

$$\sqrt{9 \cdot 25} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} = 3 \cdot 5 = 15$$

$$\sqrt{144 : 4} = \sqrt{144} : \sqrt{4} = 12 \cdot 2 = 6$$

> Quale dei due ragazzi ha ragione?

> Quale dei due ha fatto «meno fatica»?

[Hanno entrambi ragione ma Pietro fa meno fatica perché non esegue le moltiplicazioni o le divisioni sotto radice.]

DA SAPERE

Osserva che $\sqrt{36 \cdot 49} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{49}$.

Infatti $\sqrt{36 \cdot 49} = \sqrt{1764} = 42$

e $\sqrt{36} \cdot \sqrt{49} = 6 \cdot 7 = 42$.

ANIMAZIONE IN DIGITALE
Proprietà delle radici quadrate

La **radice quadrata di un prodotto** è uguale al prodotto delle radici quadrate dei suoi fattori (proprietà distributiva della radice quadrata rispetto alla moltiplicazione).

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Osserva che $\sqrt{100 : 25} = \sqrt{100} : \sqrt{25}$.

Infatti $\sqrt{100 : 25} = \sqrt{4} = 2$

e $\sqrt{100} : \sqrt{25} = 10 : 5 = 2$.

La **radice quadrata di un quoziente** è uguale al quoziente fra la radice quadrata del dividendo e la radice quadrata del divisore (proprietà distributiva della radice quadrata rispetto alla divisione).

$$\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$$

Infatti $$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a}{b}.$$

PER ESEMPIO

- La radice quadrata di un numero non negativo elevato al quadrato è il numero stesso.
  $\sqrt{3^2} = \sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{9} = 3$
- L'elevamento al quadrato di una radice quadrata coincide con il radicando.
  $(\sqrt{11})^2 = 11$
- La potenza di una radice quadrata è una radice quadrata che ha per radicando la potenza del radicando.
  $(\sqrt{5})^3 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot = \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt{5^3}$

6 Usare le tavole numeriche e la Calcolatrice Tascabile (CT)

PRIMA DI COMINCIARE Pietro ha una calcolatrice tascabile che mostra 8 cifre. Se si cerca la radice di 1,2 essa mostra il risultato

1,0954451

e se si fa il quadrato della radice ottenuta si trova nuovamente 1,2. Ma se si ricopia il risultato e lo si moltiplica per se stesso non si ritrova 1,2:

1,0954451 · 1,0954451 = 1,19999996711401

> Che cosa pensi che faccia la calcolatrice?
> Confrontati con i tuoi compagni.

La CT arrotonda l'ultima cifra dopo la virgola in modo che vengano mostrate complessivamente 8 cifre, quindi il risultato della moltiplicazione è approssimato.

DA SAPERE

Le tavole numeriche

Sulle tavole numeriche puoi trovare i quadrati e le radici quadrate dei numeri da 1 a 1000.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1,0000	1,0000
2	4	8	1,4142	1,2599
3	9	27	1,7321	1,4422
4	16	64	2,0000	1,5874
5	25	125	2,2361	1,7100
6	36	216	2,4495	1,8171
7	49	343	2,6458	1,9129
8	64	512	2,8284	2,0000
9	81	729	3,0000	2,0801
10	100	1000	3,1623	2,1544
11	121	1331	3,3166	2,2240
12	144	1728	3,4641	2,2894
13	169	2197	3,6056	2,3513
14	196	2744	3,7417	2,4101
15	225	3375	3,8730	2,4662

ANIMAZIONE IN DIGITALE
Le tavole numeriche

Ma come fare se il numero è decimale?
Considera, per esempio, $\sqrt{1,96} = ?$

nota che 1,96 ha un numero pari di cifre decimali

Puoi pensare la radice di questo numero come $\sqrt{1,96} = \sqrt{196} : \sqrt{100}$

Ora trova le due radici quadrate $14 \quad 10$

e scopri che $14:10 = \frac{14}{10} = 1,4$ ⟵ è la radice che cercavi

> Con le **tavole numeriche** è possibile trovare, oltre alle radici quadrate dei numeri interi, anche le radici quadrate di numeri decimali limitati, purché abbiano un numero pari di cifre decimali.

Nota bene: se il numero delle cifre decimali non è pari, pareggialo con:
- uno zero nei decimali finiti;
- la cifra opportuna del periodo se sono decimali periodici.

$\sqrt{2,341} = \sqrt{2,3410} =$
$= 1,53$

aggiungere zero alla destra del numero decimale non modifica nulla

PER ESEMPIO Cerchiamo con le tavole la radice quadrata di 98,307 842.
Le tavole non danno un valore tanto grande (98 307 842) nella colonna dei quadrati; quindi dobbiamo approssimare a 98,3078.

Troveremo $\sqrt{98,3078} > \sqrt{98,2081} = 9,9\mathbf{1}$ ⟵ arrotondato per difetto

oppure $\sqrt{98,3078} < \sqrt{98,4064} = 9,9\mathbf{2}$ ⟵ arrotondato per eccesso

n	n^2	n^3	$\sqrt[2]{n}$	$\sqrt[3]{n}$
988	976 144	964 430 272	31,4325	9,9598
989	978 121	967 361 669	31,4484	9,9632
990	980 100	970 299 000	31,4643	9,9666
991	982 081	973 242 271	31,4802	9,9699
992	984 064	976 191 488	31,4960	9,9733
993	986 049	979 146 657	31,5119	9,9766
994	988 036	982 107 784	31,5278	9,9800
995	990 025	985 074 875	31,5436	9,9833

DA SAPERE ● La Calcolatrice Tascabile (CT)

Prendi una calcolatrice che abbia il tasto √.

Premi: 1 4 4 √.

Ottieni: $\sqrt{144} = 12$

nella CT prima si introduce il numero e poi si preme il tasto √

Premi ora: 9 + 1 6 √ =.

Come risultato ottieni $\sqrt{9+16}$ oppure $9+\sqrt{16}$?

Troverai: $9+\sqrt{16} = 9+4 = 13$.

> Quando premiamo il tasto √, la calcolatrice trova la radice quadrata del numero scritto sul display immediatamente prima.

PER ESEMPIO

2 5 √	5
2 5 × 3 6 √ =	150
2 5 × 3 6 = √	30
2 5 × 7 = √	13.22875655
2 5 × 7 √ =	66.14378277

I numeri irrazionali sono illimitati e non periodici; quindi qualunque CT ti fornirà sempre e solo una loro rappresentazione approssimata.
Se il risultato è un numero irrazionale, al di là dell'ultima cifra rappresentata sul display devi immaginare sempre *infiniti altri decimali*.

Quello che hai visto nelle righe precedenti è il comportamento di una CT fra le più diffuse a livello di scuola dell'obbligo. Forse nella tua classe esistono esempi di CT che si comportano in maniera diversa. Nulla di male! Apri una discussione con i tuoi compagni.

RADICI

QUADRATE

SECONDO eBOOK

14 La radice quadrata

Lezione animata sull'ebook

Se l'area di un quadrato misura 9 m^2, il lato del quadrato misura 3 m, perché 3 m · 3 m = 9 m^2. Il numero che moltiplicato per sé stesso dà come risultato 9 viene chiamato radice quadrata del numero 9. Si indica con il simbolo $\sqrt{9} = 3$ e si legge «la radice quadrata di nove è tre».

simbolo di radice

$$\sqrt{9} = 3$$

radicando — radice quadrata

Area del quadrato	Lato del quadrato
9	3
100	10
25	5

$\sqrt{9} = 3$, perché $3 \cdot 3 = 9$
$\sqrt{100} = 10$, perché $10 \cdot 10 = 100$
$\sqrt{25} = 5$, perché $5 \cdot 5 = 25$

La **radice quadrata** di un numero a è un numero che, moltiplicato per sé stesso (ovvero elevato alla seconda) dà come risultato il numero a.
La radice quadrata di zero è zero.

radice quadrata

$$\sqrt{a} = b, \quad \text{se } b^2 = a \ (b \geqslant 0)$$

Una curiosità: nel 1500 i matematici tedeschi scrivevano la radice di 9 così: r9. Ben presto la «r» minuscola si è trasformata nel segno che si usa oggi, $\sqrt{9}$.

15 Espressioni con le radici quadrate

Esempio Calcola. a) $\sqrt{320+80}$ b) $\sqrt{100 \cdot 9}$ c) $\sqrt{3^2+4^2}$ d) $10 \cdot \sqrt{(7+2) \cdot \sqrt{16}}$

a) $\sqrt{320+80} =$
$= \sqrt{400} = 20$
prima le operazioni sotto radice

b) $\sqrt{100 \cdot 9} =$
$= \sqrt{900} = 30$
prima le operazioni sotto radice

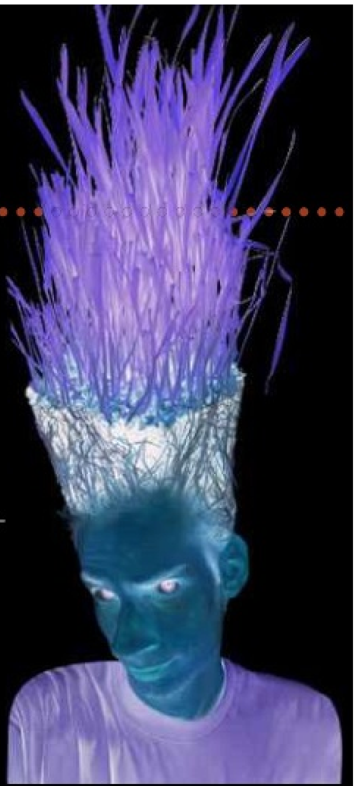
c) $\sqrt{3^2+4^2} =$
$= \sqrt{9+16}$
$= \sqrt{25} = 5$
prima le potenze poi le operazioni sotto radice

d) $10 \cdot \sqrt{(7+2) \cdot \sqrt{16}} =$
$= 10 \cdot \sqrt{9 \cdot 4}$
$= 10 \cdot \sqrt{36}$
$= 10 \cdot 6 = 60$
prima le parentesi e le radici più interne poi le operazioni sotto radice

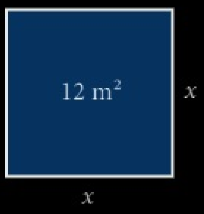
Precedenze
- Operazioni tra parentesi e operazioni sotto radice
- Potenze e radici
- Moltiplicazioni e divisioni
- Addizioni e sottrazioni

16 Radici quadrate approssimate

Lezione animata sull'ebook



Esempio 1 L'area di un quadrato misura 12 m².
Calcola la lunghezza del lato del quadrato.



$x^2 = 12$
$x = \sqrt{12}$

Bisogna trovare il numero che, moltiplicato per sé stesso, dà come risultato 12.

$\sqrt{12} > 3$, poiché $3 \cdot 3 = 9$
$\sqrt{12} < 4$, poiché $4 \cdot 4 = 16$.

La $\sqrt{12}$ è quindi un numero maggiore di 3 e minore di 4.
Proviamo con dei numeri decimali.

$3{,}4 \cdot 3{,}4 = 11{,}56 \quad < 12 < \quad 3{,}5 \cdot 3{,}5 = 12{,}25$

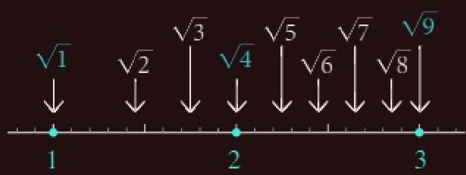
$3{,}46 \cdot 3{,}46 = 11{,}9716 \quad < 12 < \quad 3{,}47 \cdot 3{,}47 = 12{,}0409$

Si potrebbe continuare a cercare il numero all'infinito. Il numero che moltiplicato per sé stesso dà 12 è un numero decimale illimitato non periodico, cioè la sequenza di numeri dopo la virgola continua all'infinito senza ripetersi.

Il valore approssimato di $\sqrt{12}$ si può trovare con un *algoritmo* (che non mostriamo), con la *calcolatrice*, con le *tavole numeriche* (guarda il fascicolo).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$
10	100	1000	3,1623
11	121	1331	3,3166
12	144	1728	3,4641

La radice quadrata della maggior parte dei numeri è un numero decimale illimitato non periodico.
I **quadrati perfetti** sono i numeri naturali che sono il quadrato di un altro numero naturale.
Ad esempio, tra i primi dieci numeri naturali, solo 1, 4 e 9 hanno come radice quadrata un numero naturale.



Esempio 2 Stima a mente il valore approssimato alle unità di a) $\sqrt{20}$ b) $\sqrt{138}$.

a) $4 \cdot 4 = 16 < 20 < 5 \cdot 5 = 25$
La radice del numero 20 è più vicina al numero 4 che al numero 5.

b) $11 \cdot 11 = 121 < 138 < 12 \cdot 12 = 144$
La radice del numero 138 è più vicina al numero 12 che al numero 11.

Risposta: a) 4 b) 12

Esempio 3 Determina con la calcolatrice il valore approssimato ai millesimi.

a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{6{,}7}$ c) $\sqrt{336}$

a) $\sqrt{7} \approx 2{,}646$
b) $\sqrt{6{,}7} \approx 2{,}588$
c) $\sqrt{336} \approx 18{,}330$

Risposta:
a) 2,646 b) 2,588 c) 18,330

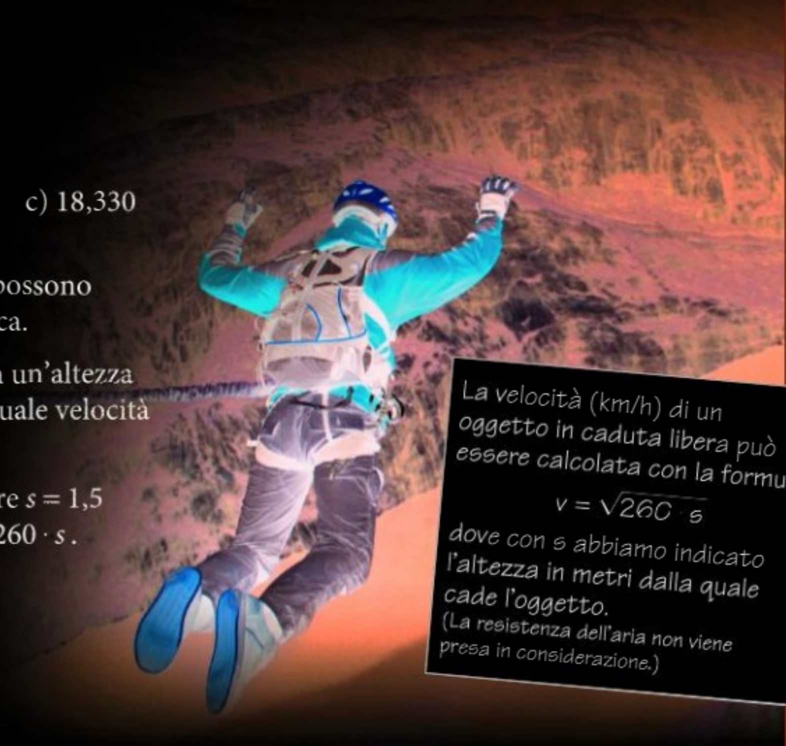
Espressioni con le radici quadrate possono comparire in alcune formule di fisica.

Esempio 4 Un oggetto cade da un'altezza di 1,5 metri. Con quale velocità arriverà a terra?

Sostituiamo il valore $s = 1{,}5$ nell'espressione $\sqrt{260 \cdot s}$.

$\sqrt{260 \cdot 1{,}5} \approx 20$*

Risposta: 20 km/h.



La velocità (km/h) di un oggetto in caduta libera può essere calcolata con la formula

$$v = \sqrt{260 \cdot s}$$

dove con s abbiamo indicato l'altezza in metri dalla quale cade l'oggetto.
(La resistenza dell'aria non viene presa in considerazione.)

USO DELLE TAVOLE PER TROVARE LA RADICE QUADRATA DI UN NUMERO

Nel fascicolo trovi le tavole numeriche con i numeri da 1 a 1000. Le radici quadrate sono state approssimate alla quarta cifra dopo la virgola.

Numero naturale minore di 1000
$\sqrt{555}$

In questo caso basta leggere direttamente dalle tavole il valore che corrisponde alla radice quadrata, e fare l'approssimazione.

Approssimiamo per esempio ai decimi:
$\sqrt{555} \approx 23{,}6$

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$
555	308 025	170 953 875	23,5584

Numero naturale maggiore di 1000
$\sqrt{2480}$

Le tavole non contengono numeri maggiori di 1000. In questo caso si va a cercare nella colonna n^2 fra quali due numeri è compreso 2480.

Il numero 2480 è compreso tra il quadrato del numero 49 e il quadrato del numero 50. Poiché è più vicino a 2500 che a 2401, prenderemo come *valore approssimato alle unità* il numero 50.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$
49	2401	117 649	7,0000
	2480		
50	2500	125 000	7,0711

17 Radice di un prodotto e radice di un quoziente

Nelle espressioni con le radici quadrate si usano alcune proprietà che facilitano il calcolo. Osserva il parallelo con le proprietà delle potenze.

PROPRIETÀ DELLE POTENZE

Potenza di un prodotto
La potenza di un prodotto si può scomporre nel prodotto delle potenze dei singoli fattori.
$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

Potenza di un quoziente
La potenza di un quoziente si può scomporre nel quoziente delle potenze di dividendo e divisore.

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

PROPRIETÀ DELLE RADICI

Radice di un prodotto
La radice del prodotto di due o più termini si può scomporre nel prodotto di due o più radici.
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Radice di un quoziente
La radice di un quoziente si può scomporre nel quoziente delle radici di dividendo e divisore.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Esempio 1

a) $\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{100} = 10$
b) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$
c) $\sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$
d) $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$

Esempio 2 Calcola
a) la radice quadrata della somma dei numeri 16 e 9
b) la somma delle radici quadrate dei numeri 16 e 9.

a) $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
b) $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

Esempio 3 Estrai dalla radice quadrata tutti i fattori elevati a potenze pari.
a) $\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{a}$ b) $\sqrt{x^7}$

a) $\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^3 \cdot a} = \sqrt{a^4} = a^2$
b) $\sqrt{x^7} = \sqrt{x^6 \cdot x} = \sqrt{x^6} \cdot \sqrt{x} = x^3 \cdot \sqrt{x}$

Esempio 4 Scomponi in fattori primi il numero sotto radice, ed estrai tutti i fattori con esponente pari.
Indica il risultato senza approssimare il numero.
a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{300}$ c) $\sqrt{6400}$

a) La scomposizione in fattori del numero 8 è:
$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$
$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2 \cdot \sqrt{2}$

b) $300 = 3 \cdot 100 = 3 \cdot 5^2 \cdot 2^2$
$\sqrt{300} = \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} = 10 \cdot \sqrt{3}$

c) $6400 = 64 \cdot 100$
$= 8 \cdot 8 \cdot 2^2 \cdot 5^2$
$= 2^2 \cdot 5^2 \cdot 8^2$
$\sqrt{6400} = \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 8^2}$
$= 2 \cdot 5 \cdot 8 = 80$

Risposta: a) $2\sqrt{2}$
b) $10\sqrt{3}$
c) 80

La teoria in sintesi

11 RIPASSIAMO LE POTENZE

base esponente

$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ valore della potenza

Quadrato di un numero
è la potenza con esponente 2 del numero.

Esempio $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$

Cubo di un numero
è la potenza con esponente 3 del numero.

Esempio $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

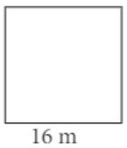
12 APPLICAZIONI DELLE POTENZE

Abbiamo visto alcune applicazioni delle potenze al calcolo con le percentuali.

13 IL QUADRATO

$p = 4 \cdot l$ $A = l^2$
Quando è nota l'area e si vuole conoscere il lato, bisogna trovare il numero che moltiplicato per se stesso dà il valore dell'area.

Esempi



1. Calcola il perimetro e l'area.
$p = 16 \cdot 4 = 64$ m
$A = 16^2 = 256$ m^2

2. Calcola il lato del quadrato.
$20 \cdot 20 = 400$
$l = 20$ m

14 LA RADICE QUADRATA

La **radice quadrata** di un numero a è un numero che, moltiplicato per se stesso (ovvero elevato alla seconda) dà come risultato il numero a.
$\sqrt{a} = b$, se $b^2 = a$ $(b \geq 0)$
La radice quadrata di zero è zero.

Esempio
$\sqrt{9} = 3$, perché $3 \cdot 3 = 9$

15 ESPRESSIONI CON LE RADICI QUADRATE

Precedenze:
- operazioni tra parentesi e operazioni sotto radice
- potenze e radici
- moltiplicazioni e divisioni
- addizioni e divisioni.

$\sqrt{(3+12) \cdot 15} - \sqrt{40 - 15}$
$= \sqrt{15 \cdot 15} - \sqrt{25}$
$= 15 - 5$
$= 10$

16 RADICI QUADRATE APPROSSIMATE

Tra i numeri naturali non sono molti i **quadrati perfetti**, ovvero i numeri che sono il quadrato di un altro numero naturale. La maggior parte delle radici quadrate dà origine a un numero decimale illimitato non periodico. In questi casi il valore della radice deve essere approssimato.
Approssimazione dei numeri.

- Se il primo numero da togliere è 0, 1, 2, 3 o 4 si approssima per difetto.

  $3{,}5|39 \approx 3{,}5$

- Se il primo numero da togliere è 5, 6, 7, 8 o 9 si approssima per eccesso.

  $2{,}3|516 \approx 2{,}4$

Per trovare la radice quadrata puoi usare:
- la calcolatrice
- le tavole numeriche.

Esempio

Approssima $\sqrt{10}$ ai centesimi.

$\sqrt{10} \approx 3{,}16227766.....$
$\approx 3{,}16$

17 RADICE DI UN PRODOTTO E RADICE DI UN QUOZIENTE

Quando sotto radice c'è il prodotto (o il quoziente) di due o più termini, la radice può essere scomposta nel prodotto (o quoziente) di due o più radici.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Se si scompone in fattori primi il numero sotto radice, i termini elevati a esponenti pari possono essere portati fuori radice.

Esempi

1. $\sqrt{36} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$

2. $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5 \cdot \sqrt{2}$

3. $\sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{100}} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

RADICI

QUADRATE

TERZO eBOOK

2.1 IMPARO...

Videolezione

La radice quadrata

FRANCESCO, PER FREQUENTARE L'UNIVERSITÀ, HA PRESO IN AFFITTO UN MONOLOCALE DI FORMA QUADRATA DA 16 M². POTRÀ SISTEMARE A UNA PARETE UN ARMADIO LUNGO 3,5 M?

PENSA

Poiché il monololocale ha forma quadrata, a che cosa corrisponde la parete? Conoscendo l'area del monolocale, quale operazione devi svolgere per determinare la lunghezza della parete?

Sappiamo che l'operazione inversa dell'elevamento al quadrato di un numero è la radice quadrata. Quindi, calcolare la radice quadrata di un numero significa trovare quel numero che elevato al quadrato dà il numero scritto sotto il segno di radice.

Nel nostro caso ci chiediamo: qual è il numero (x) che elevato al quadrato è uguale a 16? Si scrive $x^2 = 16$.

Il numero richiesto è 4 perché $4^2 = 16$.

In simboli si scrive: $\sqrt{16} = 4$
e si legge: "la radice quadrata di 16 è uguale a 4".

Concludendo, possiamo affermare che l'armadio che Francesco intende acquistare ci può stare lungo la parete perché questa è di 4 m.

La radice quadrata di un numero è quel numero che, elevato al quadrato, dà per risultato il numero sotto il segno di radice.

Il numero 16 di cui si vuole calcolare la radice si chiama **radicando**.
Il risultato dell'operazione, cioè 4, si chiama **radice**.
L'insieme del segno di radice e del radicando, cioè $\sqrt{16}$, prende il nome di **radicale**.
Il numero 2, che nella radice quadrata è sottinteso, è l'**indice** della radice.

l'indice della radice quadrata è 2 ed è sottinteso → $\sqrt{16} = 4$

$\underbrace{16}_{\text{radicando}}$; $\underbrace{4}_{\text{radice}}$

Analogamente alla radice quadrata, la radice cubica, quarta, quinta... consiste nel calcolare quel numero che, elevato alla terza, alla quarta, alla quinta... potenza, dà per risultato il radicando.

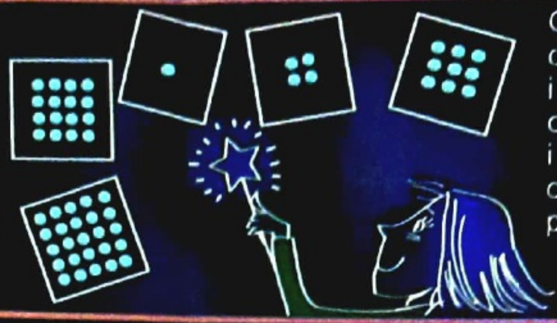
ESEMPI

- $\sqrt[3]{64} = 4$ (si legge: "radice cubica di 64 uguale 4") perché $4^3 = 64$.
- $\sqrt[4]{81} = 3$ (si legge: "radice quarta di 81 uguale 3") perché $3^4 = 81$.
- $\sqrt[5]{32} = 2$ (si legge: "radice quinta di 32 uguale 2") perché $2^5 = 32$.

Quadrati perfetti

PENSA

LIVIA TROVA UNA CARTELLINA MISTERIOSA CON LA SCRITTA "QUADRATI PERFETTI". APRENDOLA, SCOPRE CHE CONTIENE ALCUNE FIGURE COSTITUITE DA UNA SERIE DI PALLINI DISPOSTI IN MODO DA FORMARE UN QUADRATO. CHE COSA SONO, SECONDO TE?



Conta, per ognuna delle figure, tutti i pallini che la compongono e poi i pallini disposti su ogni lato. Che cosa puoi osservare?

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49... si dicono **quadrati perfetti** perché la loro radice quadrata è un numero naturale.

È facile riconoscere un numero naturale quadrato perfetto: si scompone in fattori primi e si osservano gli esponenti. Se questi sono tutti pari, il numero considerato è un quadrato perfetto, altrimenti non lo è.

ESEMPI
- $196 = 2^2 \times 7^2$ è un quadrato perfetto
- $144 = 2^4 \times 3^2$ è un quadrato perfetto
- $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ non è un quadrato perfetto (ricorda che $5 = 5^1$)

Un numero naturale è un quadrato perfetto se, scomposto in fattori primi, tutti gli esponenti dei suoi fattori sono numeri pari.

Sappiamo già che l'estrazione di radice quadrata di un numero è l'operazione inversa dell'elevamento al quadrato di quel numero.

Nel caso dei quadrati perfetti questa operazione è molto facile: basta dividere per 2 tutti gli esponenti dei fattori primi della loro scomposizione che, come abbiamo osservato, sono tutti numeri pari e moltiplicare poi tra loro i fattori così ottenuti.

Per verificare l'esattezza delle operazioni compiute possiamo fare la *prova*, che consiste nell'elevare al quadrato il numero ottenuto: troveremo il radicando. Quindi, riprendendo i quadrati perfetti degli esempi di sopra, avremo:

Ricorda che l'indice della radice quadrata è 2 ed è sottinteso.

- $\sqrt{196} = \sqrt{2^2 \times 7^2} = \sqrt{(2 \times 7)^2} = 2 \times 7 = \mathbf{14}$ *prova*: $14^2 = 196$
- $\sqrt{144} = \sqrt{2^4 \times 3^2} = \sqrt{(2^2 \times 3)^2} = 2^2 \times 3 = \mathbf{12}$ *prova*: $12^2 = 144$

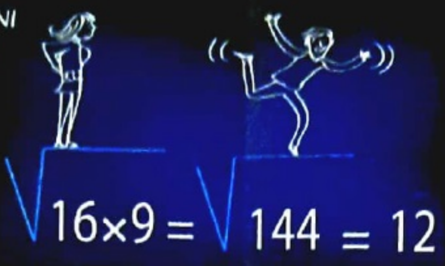
La radice quadrata di un numero naturale che sia un quadrato perfetto si ottiene scomponendo il numero stesso in fattori primi, dividendo per 2 gli esponenti dei fattori e moltiplicando tra loro i fattori così ottenuti.

Osserviamo che, *in particolare*, la radice quadrata di una potenza con esponente pari è uguale a una potenza avente per base la stessa base del radicando e per esponente l'esponente dimezzato.

ESEMPI • $\sqrt{11^2} = 11$ • $\sqrt{18^4} = 18^2$ • $\sqrt{15^6} = 15^3$

Proprietà delle radici quadrate

MARCO E NADIA STANNO FACENDO DELLE OPERAZIONI CON LE RADICI QUADRATE, MA MARCO È MOLTO PIÙ VELOCE. NADIA, INDISPETTITA, AFFERMA CHE LUI CONOSCE DEI TRUCCHI. PENSI CHE CIÒ SIA POSSIBILE?



PENSA

Considera le radici quadrate di un prodotto, di un quoziente, di una somma e di una differenza e prova a scomporle. Ti viene in mente un altro modo per eseguire le operazioni? Se sì, questo metodo funziona con tutte le operazioni o solo con alcune di esse?

Nell'estrazione di radice quadrata troviamo alcune importanti proprietà che applicheremo nei nostri calcoli, quando sarà possibile.
Osserviamo l'utilità mediante gli esempi che riportiamo.

Radice quadrata di un prodotto

ESEMPIO La radice quadrata del prodotto 16×9 si può calcolare seguendo due procedimenti.

- Calcolando prima il prodotto indicato sotto il segno di radice ed estraendo poi la radice quadrata: $\sqrt{16 \times 9} = \sqrt{144} = \mathbf{12}$
- Calcolando separatamente la radice quadrata di 16 e di 9 e poi calcolando il loro prodotto: $\sqrt{16 \times 9} = \sqrt{16} \times \sqrt{9} = 4 \times 3 = \mathbf{12}$

Osserviamo facilmente che si perviene allo stesso risultato. È chiaro però che, usando il secondo procedimento, i calcoli sono più facili.

La radice quadrata di un prodotto è uguale al prodotto delle radici quadrate dei singoli fattori.

Radice quadrata di un quoziente

Allo stesso modo possiamo calcolare la radice quadrata del quoziente $100 : 25$.

- Calcoliamo prima il quoziente indicato sotto il segno di radice e poi estraiamo la radice quadrata: $\sqrt{100:25} = \sqrt{4} = \mathbf{2}$
- Oppure, calcoliamo separatamente le due radici quadrate e poi il loro quoziente: $\sqrt{100:25} = \sqrt{100} : \sqrt{25} = 10 : 5 = \mathbf{2}$

La radice quadrata di un quoziente è uguale al quoziente delle radici quadrate del dividendo e del divisore.

Radice quadrata di una somma o di una differenza

La radice quadrata di una somma o di una differenza non è uguale alla somma o alla differenza delle radici quadrate dei suoi termini.

ESEMPI

- $\sqrt{16+25} = \sqrt{41} = 6{,}4$ mentre
  $\sqrt{16} + \sqrt{25} = 4+5 = 9$ quindi $\sqrt{16+25} \neq \sqrt{16} + \sqrt{25}$
- $\sqrt{100-64} = \sqrt{36} = 6$ mentre
  $\sqrt{100} - \sqrt{64} = 10-8 = 2$ quindi $\sqrt{100-64} \neq \sqrt{100} - \sqrt{64}$

Radice quadrata approssimata

PENSA

UN PASTICCIERE PREPARA 18 DOLCETTI DI UGUALI DIMENSIONI E VUOLE DISPORLI IN MODO DA FORMARE UN QUADRATO IL PIÙ GRANDE POSSIBILE. QUANTI PUÒ METTERNE PER OGNI LATO?

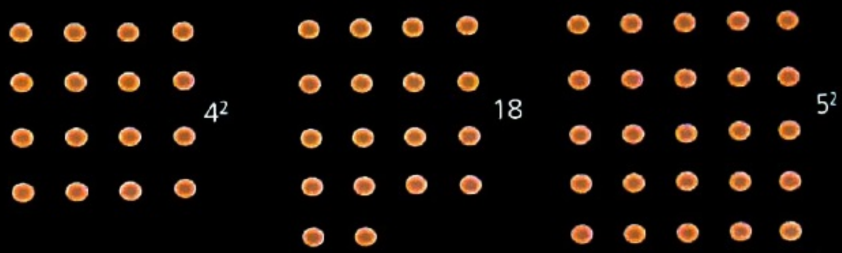
Il numero 18 è un quadrato perfetto? Quali sono i quadrati perfetti che lo precedono e lo seguono? Quale di essi rappresenta la soluzione al nostro problema? Quanti dolcetti avanzeranno?

Il numero 18 non è un quadrato perfetto perché non esiste un numero naturale che elevato al quadrato dà 18.

Poiché i quadrati perfetti che precedono e seguono il numero dato sono rispettivamente 16 e 25, si deduce che 18 è compreso fra questi. Si scrive:

$$\underbrace{16 < 18 < 25}_{\text{18 è compreso fra 16 e 25}} \qquad \text{oppure} \qquad \underbrace{\mathbf{4}^2 < 18 < \mathbf{5}^2}_{\text{18 è compreso fra } 4^2 \text{ e } 5^2}$$

Osserva le seguenti figure che rappresentano graficamente la situazione del problema.



Generalmente, quando si considera la radice quadrata di un numero approssimata a meno di un'unità ci si riferisce a quella per difetto e si scrive:

$\overset{1}{\sqrt{18}} = 4$

Da quanto è stato detto, scaturisce che il pasticciere può mettere al massimo 4 dolcetti per lato e ne avanzano 2. Il **resto** si calcola facilmente, così: $18 - 4^2 = 18 - 16 = 2$.
Il numero **4** rappresenta la radice quadrata di 18 **approssimata per difetto** alle unità o a meno di un'unità, mentre il numero **5** è la radice quadrata di 18 **approssimata per eccesso** alle unità o a meno di un'unità. Quindi, possiamo scrivere:

$4 < \sqrt{18} < 5 \leftarrow$ la radice quadrata di 18 è un numero compreso fra 4 e 5.

$\sqrt{18} = \begin{cases} 4 \rightarrow \text{per difetto} \\ 5 \rightarrow \text{per eccesso} \end{cases}$

La radice quadrata di un numero, approssimata per difetto a meno di un'unità, è il numero naturale il cui quadrato si avvicina di più al numero dato, ma non lo supera.
La radice quadrata di un numero, approssimata per eccesso a meno di un'unità, è il numero naturale il cui quadrato si avvicina di più al numero dato, ma lo supera.

Proseguendo l'approssimazione, possiamo considerare una, due, tre… cifre decimali. Si dice allora che la radice ottenuta è approssimata a meno di un decimo (0,1), di un centesimo (0,01), di un millesimo (0,001)… rispettivamente per difetto e per eccesso.

$4{,}2 < \overset{0,1}{\sqrt{18}} < 4{,}3 \qquad 4{,}24 < \overset{0,01}{\sqrt{18}} < 4{,}25 \qquad 4{,}242 < \overset{0,001}{\sqrt{18}} < 4{,}243$