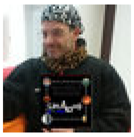
RISORSE DIDATTICHE.



【ResearchGate Project】 *By … 0000-0001-5086-7401 & lnkd.in/erZ48tm*

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

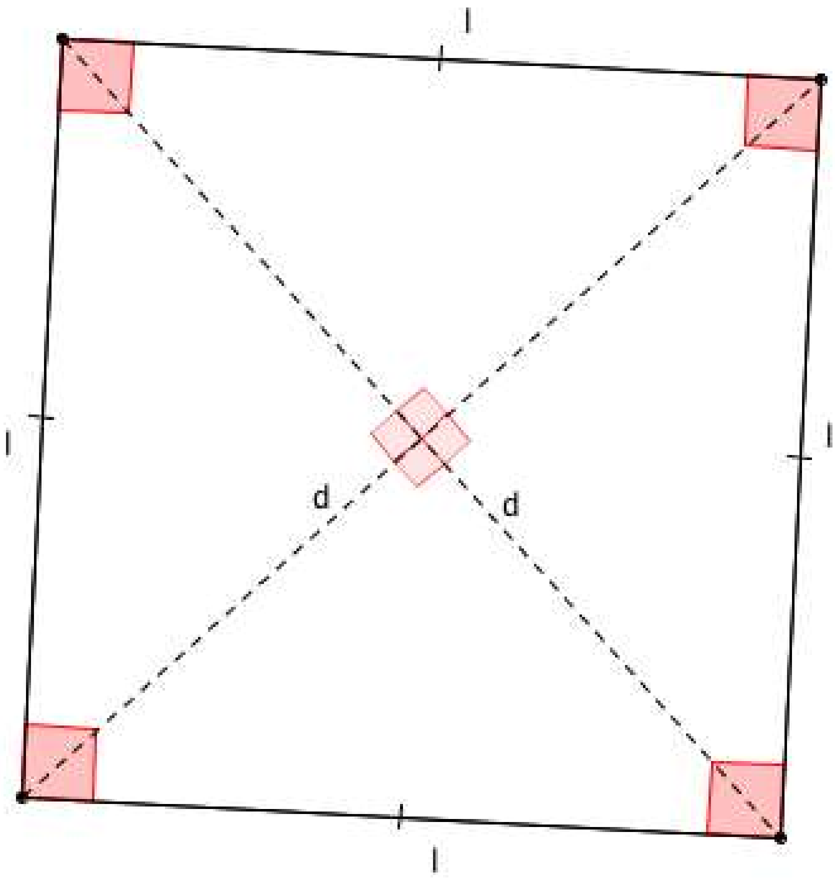
Il quadrato: formule di area, perimetro, diagonale

2'

Il poligono regolare con quattro lati è detto *quadrato*. Essendo un poligono regolare, esso eredita tutte le proprietà di questi speciali poligoni; inoltre, assume un particolare ruolo in quanto **"punto di arrivo" della classificazione dei quadrilateri**, secondo la trattazione consueta.

Definizione

Un parallelogramma che abbia tutti gli angoli interni congruenti e tutti i lati congruenti è detto ***quadrato***.



Per quanto detto nella definizione, quindi, un quadrato è contemporaneamente un rettangolo e un rombo. Inoltre, essendo equiangolo (cioè, con tutti gli angoli congruenti) ed equilatero (cioè, con tutti i lati uguali), è un poligono regolare.

Ciascun angolo interno del quadrato misura $\frac{\pi}{2}$ radianti, cioè $90°$.

Come conseguenza delle proprietà che il quadrato eredita essendo un rombo e un rettangolo, abbiamo il seguente risultato.

TEOREMA (*Caratterizzazione del quadrato*): Un parallelogramma è un quadrato se e solo se le sue diagonali sono congruenti e perpendicolari tra loro, oppure se le diagonali sono congruenti e sono anche bisettrici degli angoli interni.

Formule del quadrato

Ogni quadrato è determinato univocamente a partire dalla misura del suo lato l, o dalla misura della sua diagonale d. Infatti:

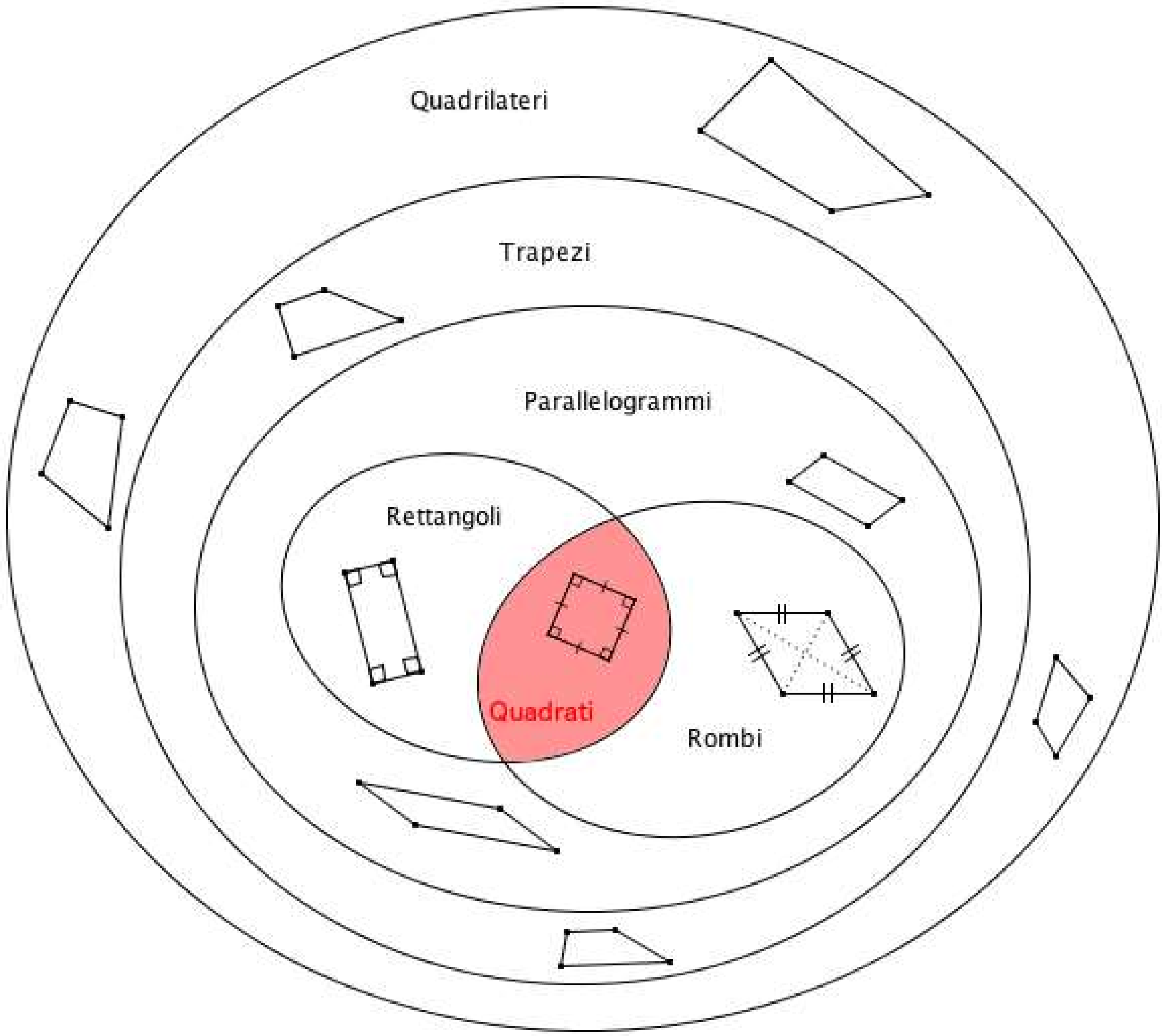
Area: $A = l^2 = \frac{1}{2}d^2$

Perimetro: $2p = 4l = 2\sqrt{2}d$

Lato: $l = \sqrt{A} = \frac{2p}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}d$

Diagonale: $d = \sqrt{2A} = \frac{\sqrt{2}}{4}2p = \sqrt{2}l$

Dal punto di vista della classificazione dei quadrilateri, il quadrato si colloca nell'intersezione di tutti gli insiemi in cui i quadrilateri vengono suddivisi:



VAI ALLA PROSSIMA LEZIONE 27

Testo su Geometria euclidea

Relatori

Michele Ferrari

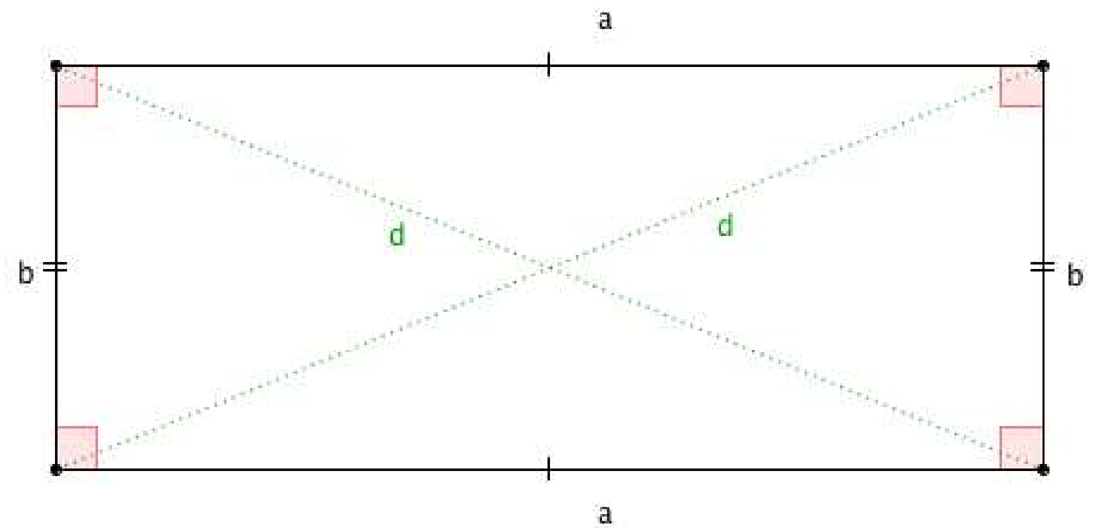
Il rettangolo: formule di perimetro, area e diagonale

2'

Nello studio dei quadrilateri, rivestono particolare importanza i parallelogrammi, che sono quei quadrilateri che hanno due coppie di lati paralleli tra loro. Vogliamo individuare un'ulteriore sottoclasse dei parallelogrammi, imponendo una condizione sugli angoli interni.

Definizione

Un parallelogramma che ha tutti gli angoli interni congruenti tra loro si dice ***rettangolo.***



Dato che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è sempre pari ad un angolo piatto, ossia a 360° o 2π radianti, è chiaro che ciascun angolo interno di un rettangolo misura $360 : 4 =$ 90 gradi, ossia $2\pi : 4 = \frac{\pi}{2}$ radianti, cioè è un angolo retto.

La condizione di congruenza tra gli angoli interni è inoltre sufficiente a garantire che un quadrilatero qualsiasi (e non per forza un parallelogramma) sia un rettangolo: ogni quadrilatero che abbia i quattro angoli interni tutti congruenti tra loro è dunque un rettangolo.

Nel caso particolare in cui tutti i lati siano uguali (e cioè, che il rettangolo sia anche un rombo), il rettangolo verrà chiamato ***quadrato***.

TEOREMA (Caratterizzazione di un rettangolo):Un parallelogramma è un rettangolo se e solo se ha le diagonali congruenti, o se ha almeno un angolo retto.

Formule del rettangolo

Ciascun rettangolo è completamente determinato se si conoscono due dei suoi lati non paralleli fra loro (spesso chiamati anche **dimensioni** del rettangolo) oppure un lato qualsiasi e una delle sue diagonali (che, ribadiamo, sono congruenti). Per queste formule faremo riferimento alla figura mostrata all'inizio della lezione.

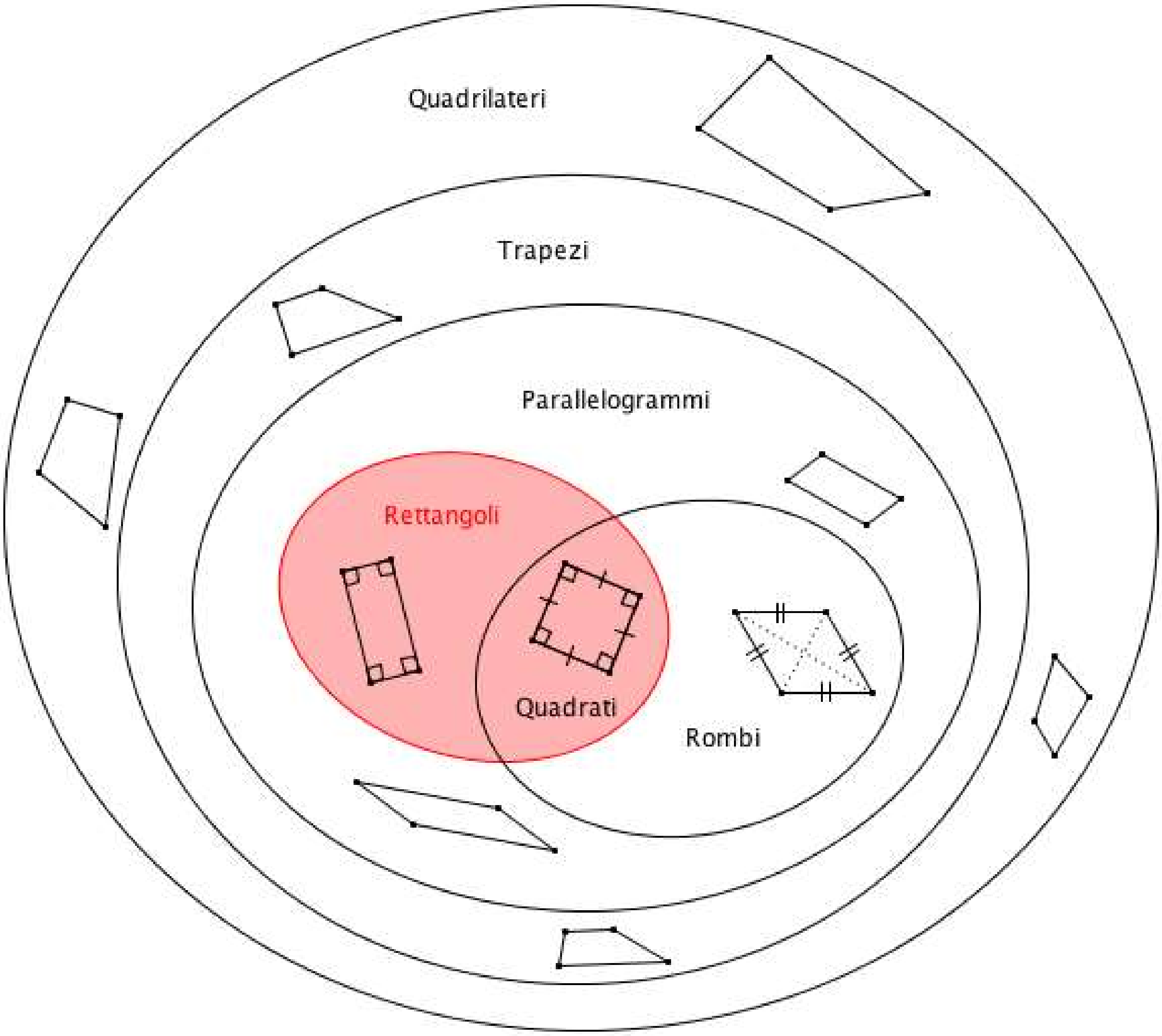
Area: $A = b \cdot a$

Perimetro: $2p = 2b + 2a$

Diagonale: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Se si conosce un lato e una sua diagonale, si possono usare le formule precedenti una volta ricavata la dimensione mancante: infatti

Vediamo ora come si collocano i rettangoli all'interno dell'insieme dei quadrilateri:



VAI ALLA PROSSIMA LEZIONE 26

Testo su Geometria euclidea

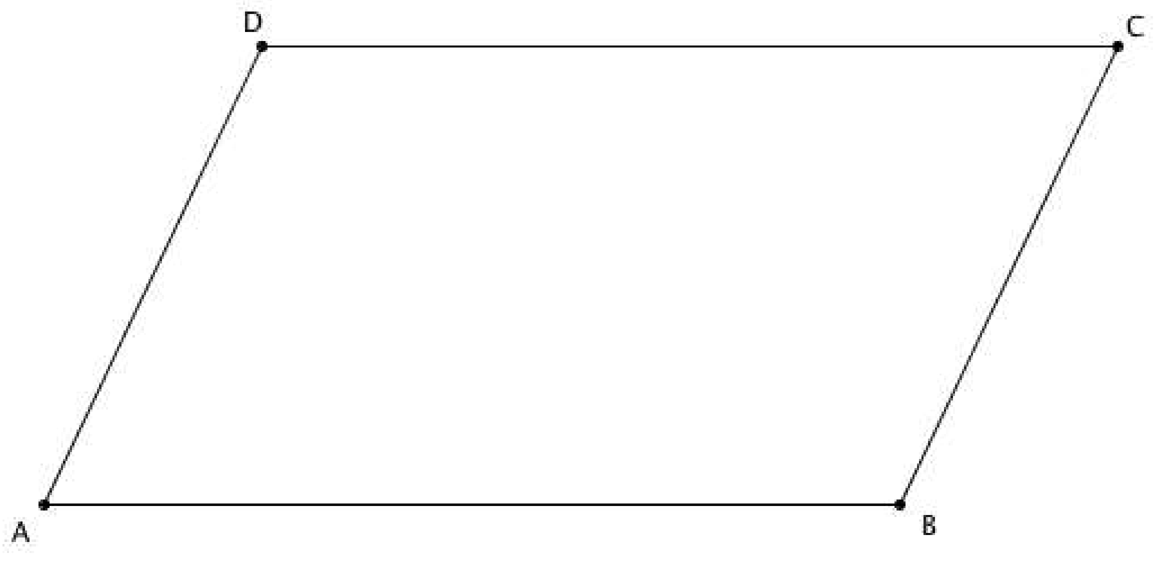
Il parallelogramma: formule di area e perimetro e proprietà

2'

Quando consideriamo un quadrilatero con due lati paralleli, stiamo in realtà studiando un *trapezio*. Che figura otteniamo quando anche gli altri due lati sono paralleli? Di certo il quadrilatero rimane un trapezio, ma la proprietà che abbiamo aggiunto rende la nostra figura molto più interessante.

Definizione

Un quadrilatero avente i lati opposti paralleli si dice ***parallelogramma*** (o anche ***parallelogrammo***).



$ABCD$ è un parallelogramma perché $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$.

Come anticipato prima, tutti i parallelogrammi sono trapezi (ma non tutti i trapezi sono parallelogrammi!). Inoltre, tutti i rettangoli, rombi e quadrati sono particolari tipi di parallelogramma.

Vale il seguente, importante risultato:

TEOREMA (*Caratterizzazione del parallelogramma*): Un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se ha una tra le seguenti proprietà:

- i lati opposti sono congruenti a due a due (e li chiamiamo con lo stesso nome a oppure b);
- gli angoli opposti sono congruenti a due a due (e li chiamiamo con lo stesso nome α oppure β);
- gli angoli adiacenti a ciascun lato sono supplementari (cioè $\alpha + \beta = \pi$, un angolo piatto);
- i punti medi delle diagonali coincidono;
- due lati opposti sono paralleli e congruenti.

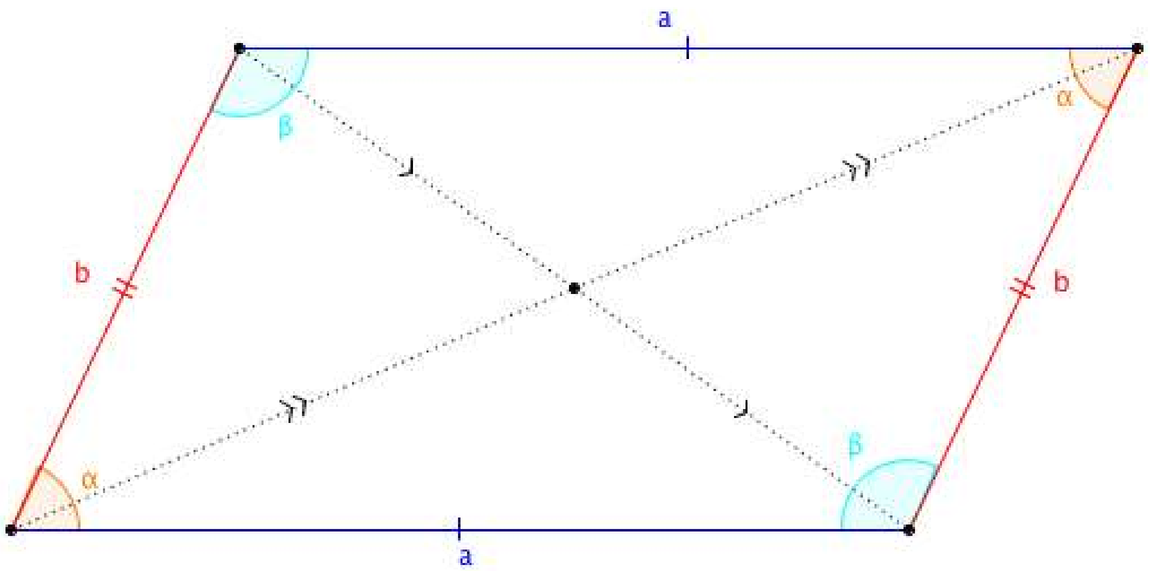
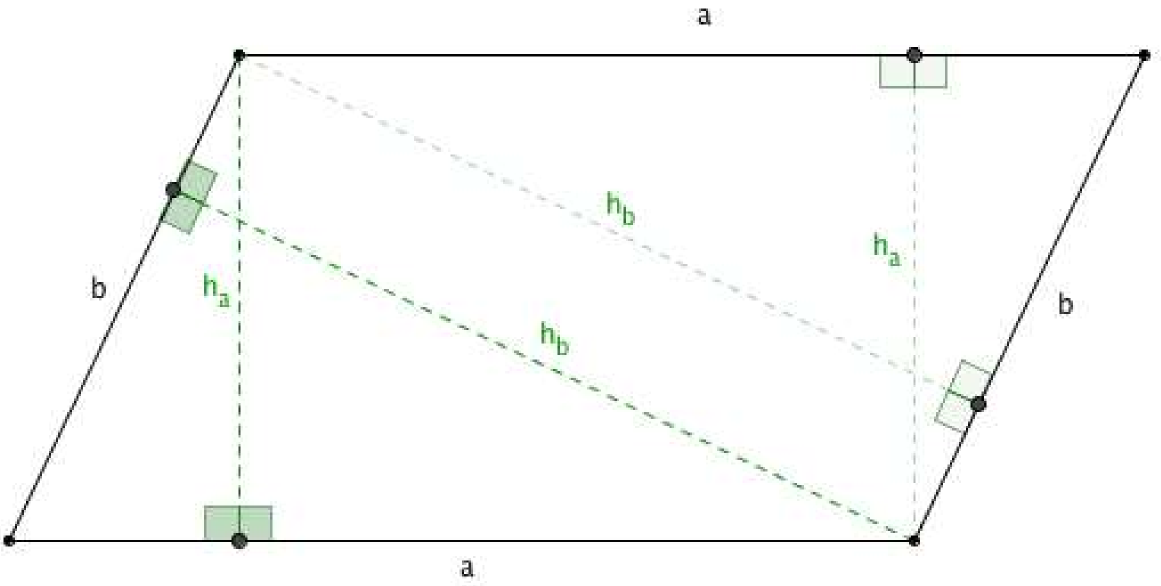


Figura 1: proprietà caratterizzanti del parallelogramma

Definizione

Dato un lato l e un vertice A che non appartiene a l, ***l'altezza relativa al lato*** l (indicata con h_l) è il segmento passante per A perpendicolare al lato l (o al suo prolungamento).



Formule del parallelogramma

In questa sezione, facciamo riferimento alla figura 1 vista prima. Daremo alcune delle formule del parallelogramma nel caso in cui siano dati i suoi lati e l'altezza relativa a uno dei due.

Area: $A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$;

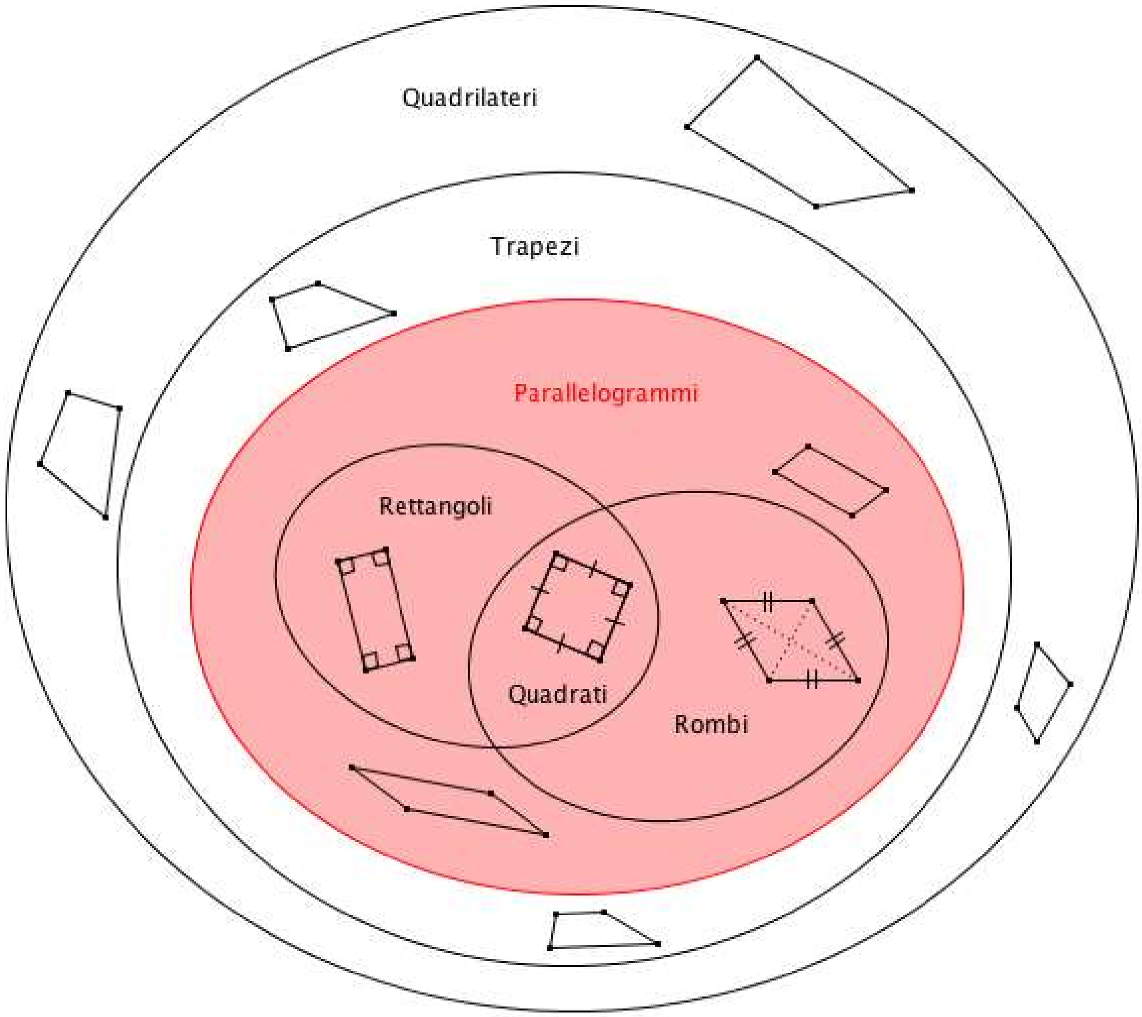
Altezza relativa ad a (rispettivamente a b): $h_a = \frac{A}{a}$ (rispettivamente $h_b = \frac{A}{b}$);

Perimetro: $2p = 2a + 2b$;

Diagonali: $d_{minore} = \sqrt{b^2 + a^2 - 2b\sqrt{a^2 - h_b^2}}$; $d_{maggiore} = \sqrt{b^2 + a^2 + 2b\sqrt{a^2 - h_b^2}}$.

Angoli: $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{h_a}{b}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{h_b}{a}\right)$.

Vediamo con un diagramma di Venn dove si posizionano i parallelogrammi all'interno dell'insieme di tutti i quadrilateri:



VAI ALLA PROSSIMA LEZIONE 24

Testo su Geometria euclidea

Relatori

Michele Ferrari

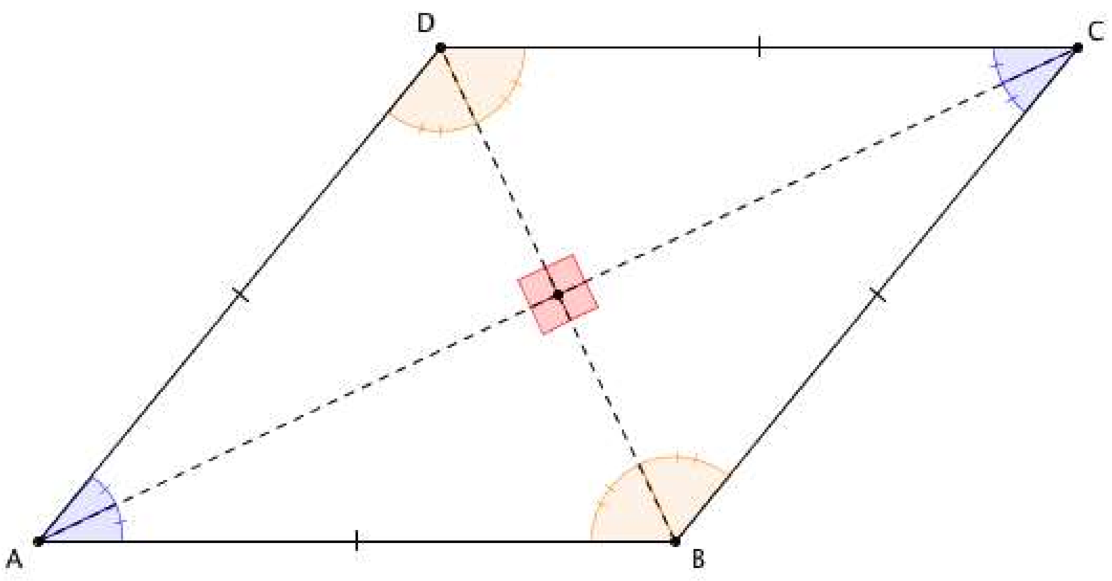
Il rombo: area, perimetro e diagonali

2'

All'interno dell'insieme dei parallelogrammi, esistono particolari sottoclassi di poligoni. Per esempio, se imponiamo che tutti gli angoli interni al parallelogramma siano congruenti, otteniamo un rettangolo; ma cosa succede se invece imponiamo la congruenza tra i lati di un parallelogramma?

Definizione

Si dice ***rombo*** il parallelogramma che ha tutti i lati congruenti fra loro.



In realtà, è sufficiente imporre la condizione di congruenza tra i lati a un semplice quadrilatero

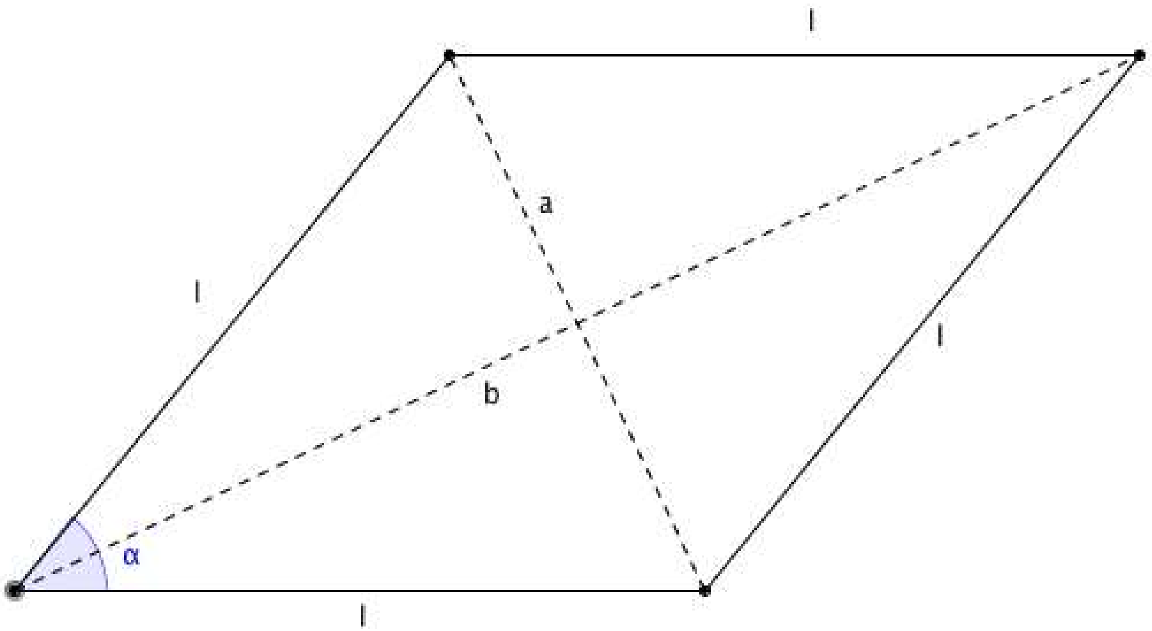
Un caso particolare di rombo si ha quando anche tutti gli angoli sono congruenti (e cioè, quando il rombo è anche un rettangolo). In questo caso, il rombo viene chiamato ***quadrato***.

TEOREMA (*Caratterizzazione del rombo*): Un parallelogramma è un rombo se e solo se le sue diagonali sono perpendicolari, o se le diagonali sono anche le bisettrici degli angoli interni.

Formule del rombo

Ogni rombo è univocamente determinato, in particolare, a partire da una di queste combinazioni di grandezze:

- la lunghezza delle sue diagonali a e b;
- la lunghezza del suo lato l e la misura di un angolo interno α.



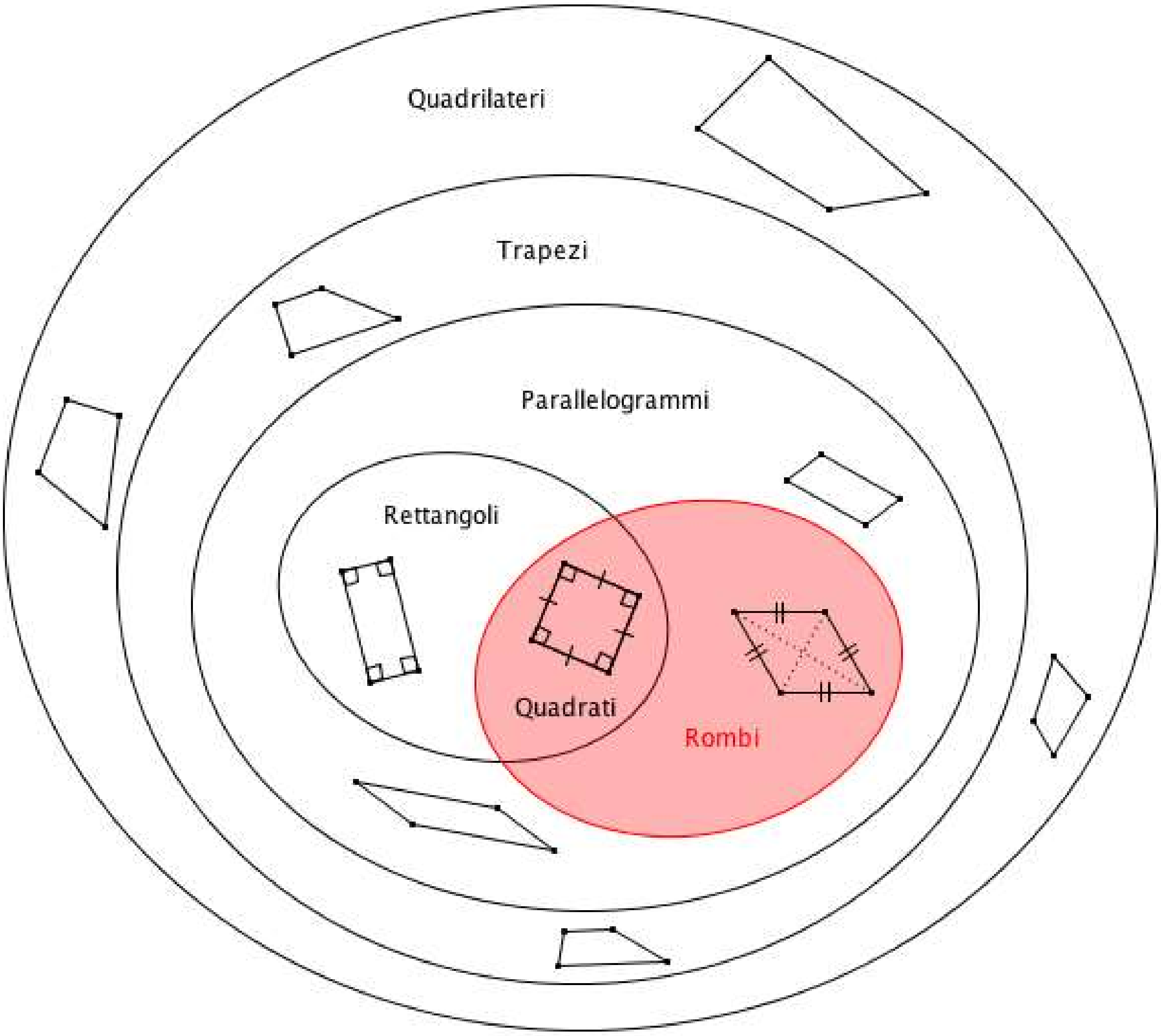
Daremo alcune formule utili per trovare le grandezze relative al rombo. Per la comprensione

	Lunghezza delle diagonali a, b	Lunghezza del lato l e angolo α
Area	$A = \frac{b \cdot a}{2}$	$A = l^2 \sin(\alpha)$
Perimetro	$2p = 2\sqrt{a^2 + b^2}$	$2p = 4l$
Lato	$l = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$	$-----$
Diagonali	$-----$	$a = 2l \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; $b = 2l \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Naturalmente valgono tutte le formule inverse, come per esempio quelle per trovare le diagonali e i lati a partire dall'area e dal perimetro:

$$a = \frac{2A}{b}, \quad b = \frac{2A}{a}, \quad l = \frac{2p}{4} = \sqrt{\frac{A}{\sin(\alpha)}}.$$

Vediamo adesso come si collocano i rombi all'interno dell'insieme dei quadrilateri:



VAI ALLA PROSSIMA LEZIONE 25

Testo su Geometria euclidea

Relatori

Michele Ferrari

Il trapezio isoscele, rettangolo e scaleno: formule e definizioni

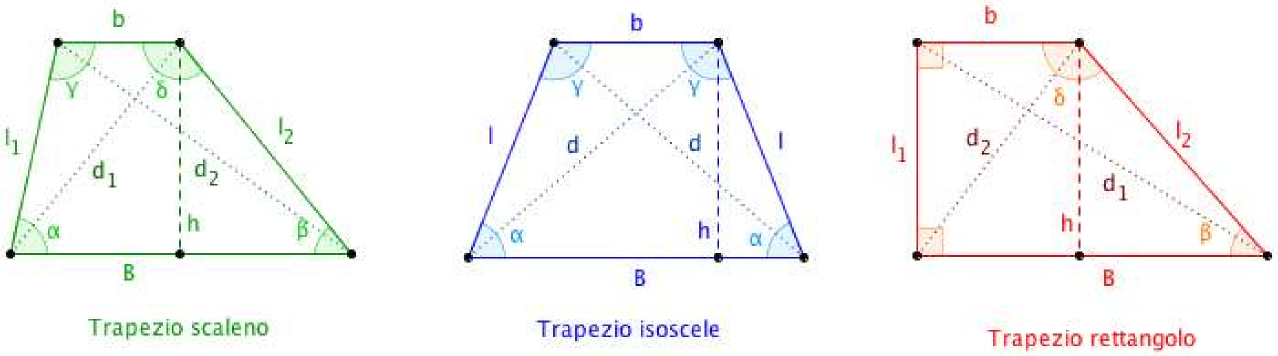
3'

I poligoni aventi quattro lati si chiamano *quadrilateri*. Quali sono le proprietà che caratterizzano questi oggetti geometrici? La classe più generale di quadrilateri che viene analizzata di solito è quella dei *trapezi*. In questa lezione ne vedremo le proprietà principali e studieremo tutte le formule più importanti per trovare area, perimetro e altre grandezze geometriche.

Definizione

Si chiama ***trapezio*** un quadrilatero avente due lati paralleli.
I due lati paralleli si dicono ***basi*** del trapezio: se non sono congruenti, in genere si distingue tra la ***base maggiore*** B e la ***base minore*** b. I rimanenti due lati vengono chiamati ***lati obliqui*** l_1, l_2 del trapezio; la distanza tra le basi è detta ***altezza*** h del trapezio. I segmenti che collegano vertici opposti del trapezio si chiamano ***diagonali*** d_1, d_2.
Inoltre:

- se i lati obliqui l_1, l_2 del trapezio sono congruenti, il trapezio è detto ***trapezio isoscele****;*
- se uno dei due lati del trapezio è perpendicolare a una base (e quindi anche all'altra) il trapezio si dice ***trapezio rettangolo****;*
- se il trapezio non ha particolari proprietà, diremo che è un ***trapezio scaleno***.



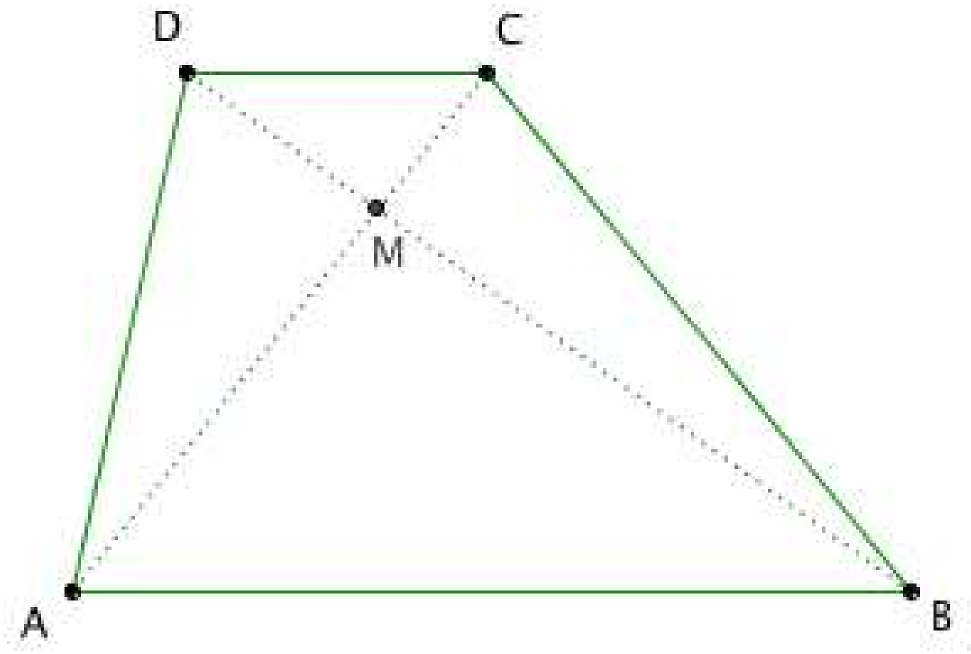
Valgono i seguenti risultati:

TEOREMA: Un trapezio è isoscele se e solo se gli angoli adiacenti a ciascuna base sono congruenti (questo risultato è stato già evidenziato nella figura precedente).

TEOREMA: In un trapezio, gli angoli adiacenti a un lato obliquo sono supplementari (facendo riferimento alla figura per il trapezio scaleno: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$).

Inoltre, in un trapezio isoscele anche gli angoli opposti sono supplementari (utilizzando la figura del trapezio isoscele: $\alpha + \gamma = \pi$) e le diagonali sono congruenti.

TEOREMA: Le diagonali di un trapezio si tagliano in parti proporzionali.



$$AM : MC = BM : MD$$

Formule per il trapezio

Le formule più comuni, utilizzabili per un trapezio generico, sono le seguenti:

Area: $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$

Perimetro: $2p = B + b + l_1 + l_2$

Altezza: $h = \frac{2A}{B + b}$

Base maggiore: $B = \frac{2A}{h} - b$

Base minore: $b = \frac{2A}{h} - B$

dove B è la base maggiore, b la base minore, h l'altezza e l_1, l_2 i lati obliqui.

Diamo ora delle formule per trovare la misura di area, perimetro, altezza, lati obliqui e diagonali di un trapezio nel caso in cui si conoscano:

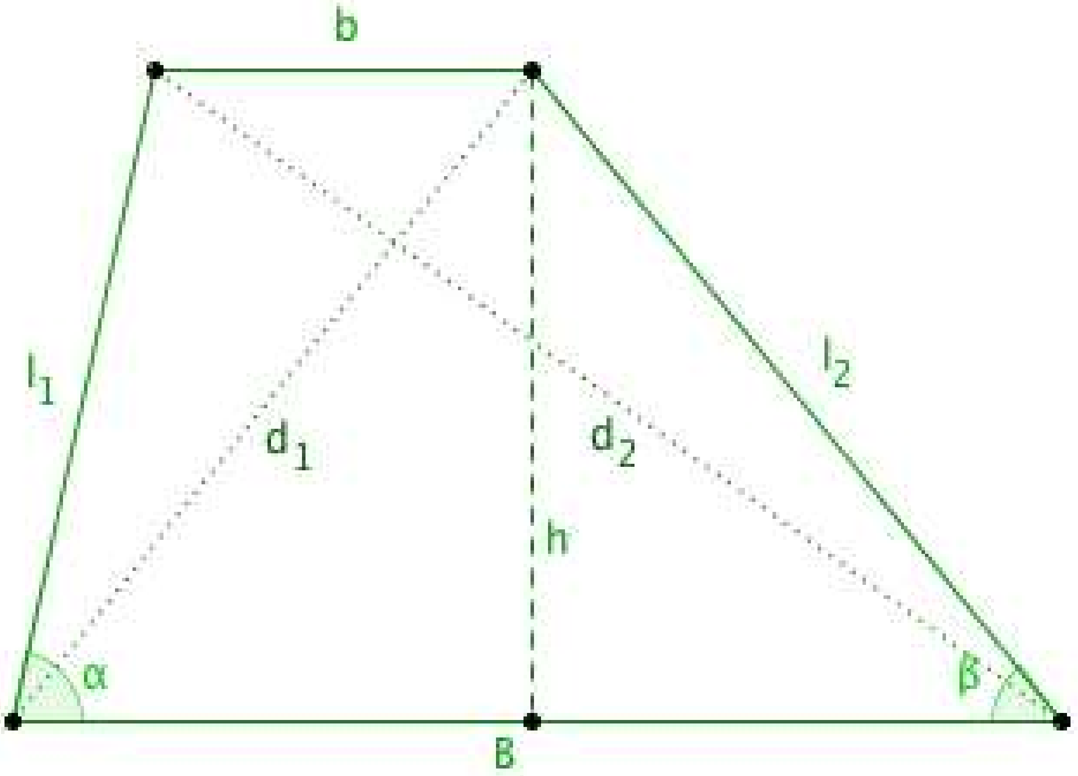
- le due basi B, b e gli angoli alla base α e β;
- i quattro lati B, b, l_1, l_2.

La motivazione di questa scelta sta nel fatto che conoscere una di queste due combinazioni di grandezze determina completamente tutte le misure dei lati e degli angoli del trapezio (a differenza di quanto accade se si conoscono solo le basi e l'altezza del trapezio, per esempio).

Per una comprensione approfondita delle formule in cui compaiono gli angoli α e β, si richiede la conoscenza della trigonometria e delle funzioni goniometriche in generale.

Le formule verranno suddivise a seconda che il trapezio preso in considerazione sia scaleno, isoscele o rettangolo.

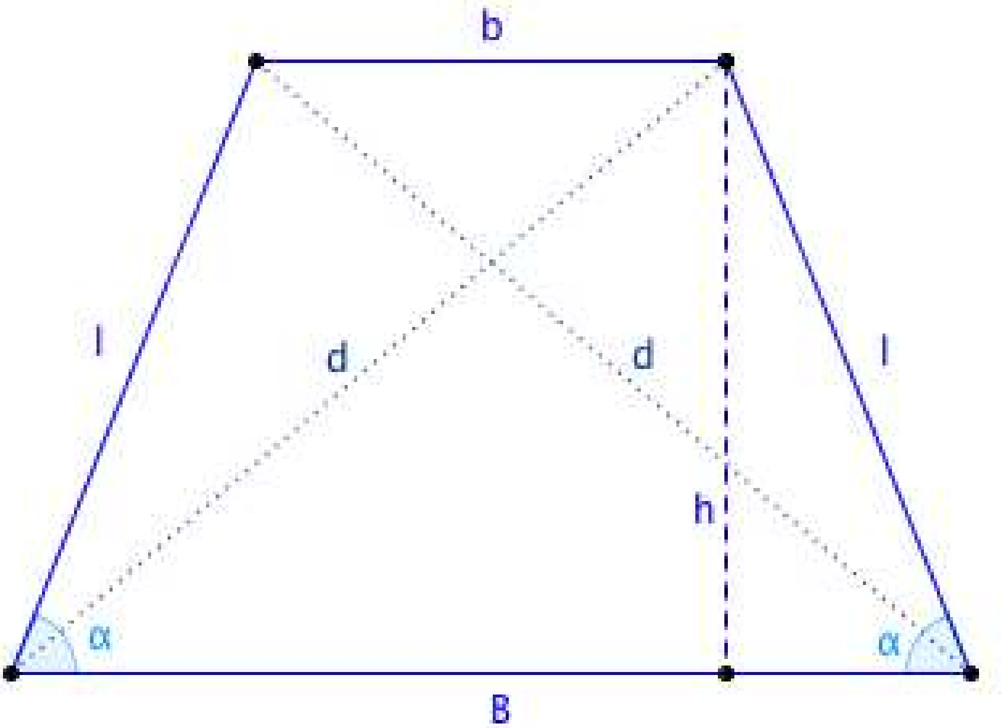
Trapezio scaleno



	Conoscendo B, b e gli angoli α, β	**Conoscendo i quattro lati** B, b, l_1, l_2
Area	$A = (B+b)(B-b)\dfrac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{2\sin(\alpha+\beta)}$	$A = \dfrac{B+b}{4(B-b)}\sqrt{R}$
Perimetro	$2p = B + b + (B-b)\dfrac{\sin(\alpha)+\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$	$2p = B + b + l_1 + l_2$
Altezza	$h = (B-b)\dfrac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$	$h = \dfrac{2A}{B+b}$, con A area del trapezio
Lati obliqui	$l_1 = \dfrac{(B-b)\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}; \; l_2 = \dfrac{(B-b)\sin(\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}.$	$-----$
Diagonali	$d_1 = \dfrac{\sqrt{B^2\sin^2(\alpha)+2Bb\sin(\beta)\sin(\alpha)\cos(\alpha+\beta)+b^2\sin^2(\beta)}}{\sin(\alpha+\beta)};$ $d_2 = \dfrac{\sqrt{B^2\sin^2(\beta)+2Bb\sin(\beta)\sin(\alpha)\cos(\alpha+\beta)+b^2\sin^2(\alpha)}}{\sin(\alpha+\beta)}.$	$d_1 = \sqrt{\dfrac{bB^2 - Bb^2 - bl_1^2 + Bl_2^2}{B-b}};$ $d_2 = \sqrt{\dfrac{bB^2 - Bb^2 - bl_2^2 + Bl_1^2}{B-b}}.$

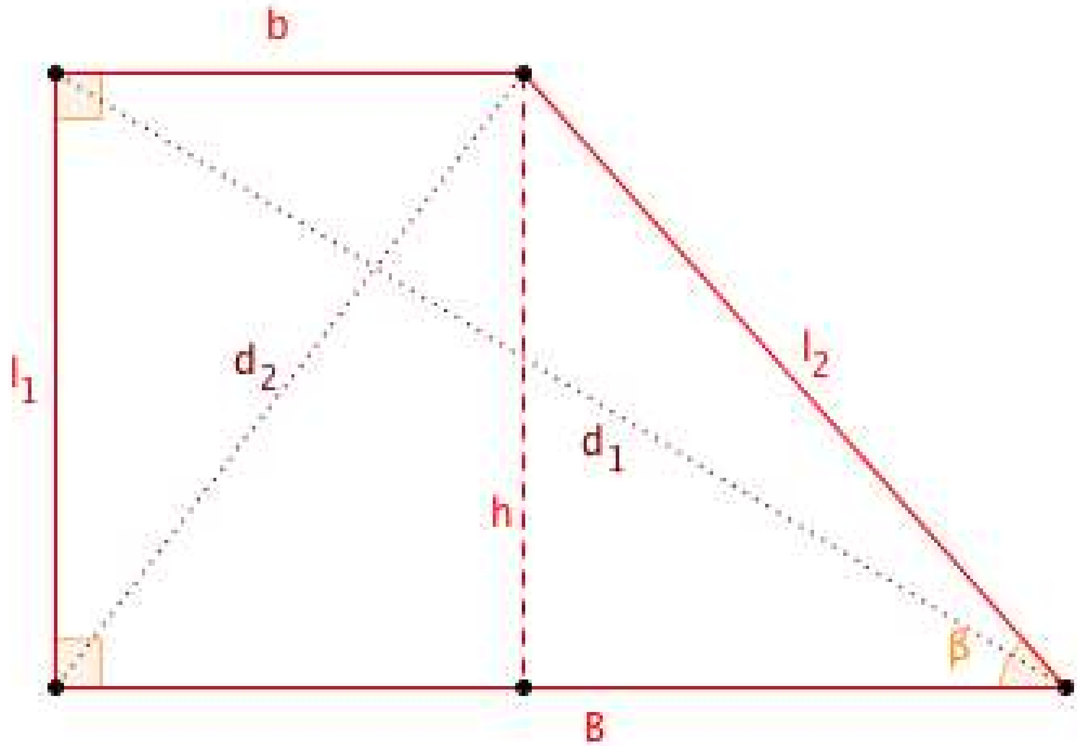
Nella tabella precedente, vale $R = (-b + B + l_1 + l_2)(-B + b + l_1 + l_2)(-B + b - l_1 + l_2)(-B + b + l_1 - l_2)$.

Trapezio isoscele



	Conoscendo B, b e l' angolo α	**Conoscendo i lati B, b, l**
Area	$A = \frac{1}{4}(B+b)(B-b)\tan\alpha$	$A = \frac{B+b}{2}\sqrt{4l^2-(B-b)^2}$
Perimetro	$2p = B+b+\frac{2(B-b)}{\cos(\alpha)}$	$2p = B+b+2l$
Altezza	$h = \frac{B-b}{2}\tan(\alpha)$	$h = \sqrt{l^2-\frac{(B-b)^2}{4}}$
Lato obliquo	$l = \frac{(B-b)\sin(\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}$	$-----$
Diagonali	$d_1 = d_2 = \frac{\sqrt{B^2+2Bb\cos(2\alpha)+b^2}}{2\cos(\alpha)}$	$d_1 = d_2 = \sqrt{bB+l^2}$

Trapezio rettangolo



	Conoscendo B, b e l' angolo β	**Conoscendo i quattro lati** B, b, l_1, l_2
Area	$A = \frac{1}{2}(B+b)(B-b)\tan(\beta)$	$\frac{(B+b)\cdot l_1}{2}$
Perimetro	$2p = B + b + (B-b)\tan(\beta) + \frac{(B-b)}{\cos(\beta)}$	$2p = B + b + l_1 + l_2$
Altezza	$h = (B-b)\tan(\beta)$	$h = l_1$
Lati obliqui	$l_1 = (B-b)\tan(\beta);\ l_2 = \frac{B-b}{\cos(\beta)}$	$-----$
Diagonali	$d_1 = \frac{\sqrt{B^2-2Bb\sin^2(\beta)+b^2\sin^2(\beta)}}{\cos(\beta)};$ $d_2 = \frac{\sqrt{b^2-2Bb\sin^2(\beta)+B^2\sin^2(\beta)}}{\cos(\beta)}$	$d_1 = \sqrt{B^2+l_1^2};\ d_2 = \sqrt{b^2+l_1^2}$

Revisione scientifica a cura di Marco Guglielmino

VAI ALLA PROSSIMA LEZIONE 23

Testo su Geometria euclidea

Relatori

Michele Ferrari