RISORSE DIDATTICHE.

【**ResearchGate Project**】 ***By … 0000-0001-5086-7401 & lnkd.in/erZ48tm***

Rapporti e Proporzioni

(a cura Prof.ssa R. Limiroli)

Rapporto tra numeri

Il rapporto diretto tra due numeri a e b, il secondo dei quali diverso da zero, si indica con

$a : b$ oppure $\frac{a}{b}$

Ricorda

a e b sono i termini del rapporto
a è detto antecedente e b conseguente
b/a è il rapporto inverso o reciproco di a/b
b/a per a/b =1

Proprietà invariantiva
Moltiplicando o dividendo entrambi i termini di un rapporto per uno stesso numero diverso da zero, il valore del rapporto non cambia.

Rapporto tra grandezze

Bisogna distinguere tra

- Rapporto tra grandezze omogenee
- Rapporto tra grandezze non omogenee

Definizione

Due **grandezze** si dicono **omogenee** se sono confrontabili, ovvero se possono essere espresse con la stessa unità di misura.

Il rapporto tra due grandezze omogenee è un numero che dipende solo dalle due grandezze considerate e non cambia anche cambiando l'unità di misura usata per entrambe le grandezze.

Esempio
Considerate le aree dei due rettangoli di seguito raffigurati come esempio di grandezze omogenee, il rapporto tra le loro aree è espresso dal quoziente:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{15cm^2}{6cm^2} = \frac{5}{2}$$

Il rapporto tra due grandezze non omogenee è un numero accompagnato da una opportuna unità di misura. E' una nuova grandezza non omogenea con nessuna delle due grandezze tra le quali è calcolato il rapporto
Si è soliti chiamare i rapporti tra grandezze non omogenee **grandezze derivate.** Ne sono esempio la velocità, l'accelerazione, la pressione, ecc.

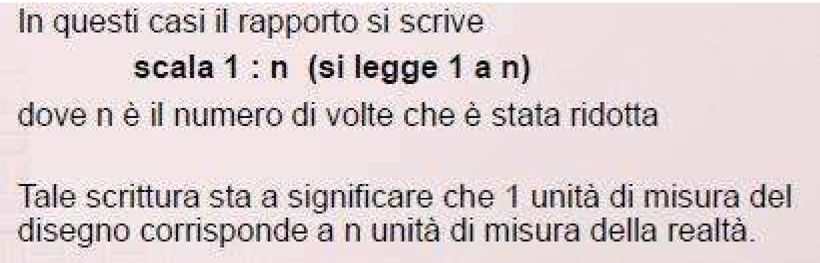
Ad esempio se un'auto percorre 390 km in 3 ore la sua velocità media è

$$v = \frac{s}{t} = \frac{390km}{3h} = 130km/h$$

Applicazioni dei rapporti

1) Scala di ingrandimento/ riduzione

Le scale di riduzione si utilizzano ad esempio nelle carte geografiche.



In questi casi il rapporto si scrive

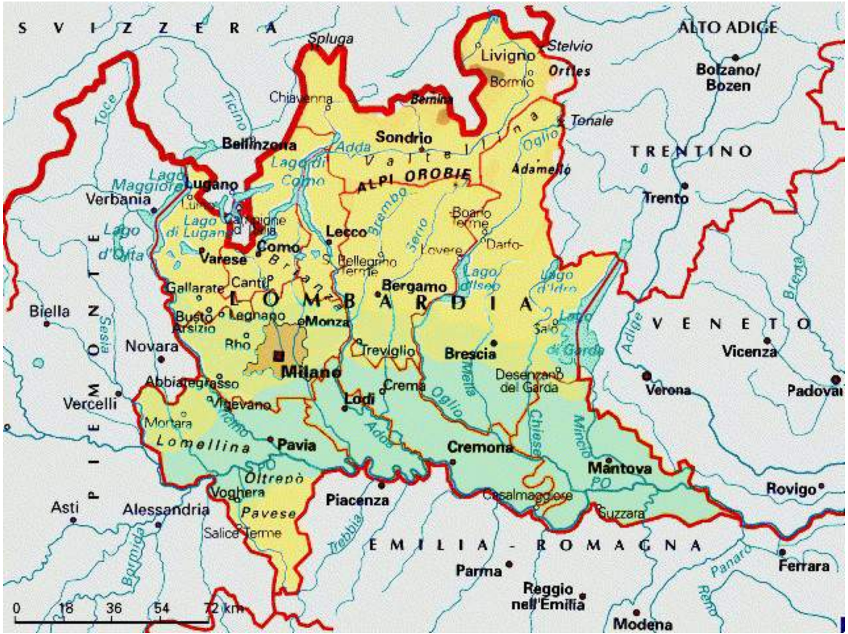
scala 1 : n (si legge 1 a n)

dove n è il numero di volte che è stata ridotta

Tale scrittura sta a significare che 1 unità di misura del disegno corrisponde a n unità di misura della realtà.

Vale a dire la scala di un qualsiasi disegno è il rapporto tra due numeri, il primo dei quali è la misura di una qualsiasi distanza sul disegno, ossia la distanza grafica, ed il secondo è la misura della lunghezza reale che esso rappresenta, ossia la distanza reale.

Ad esempio la scrittura scala 1: 1 250 000 indica che se la distanza sulla carta tra due località è 1 cm, queste località disteranno sul territorio 1 250 000 cm= 12,5 km.



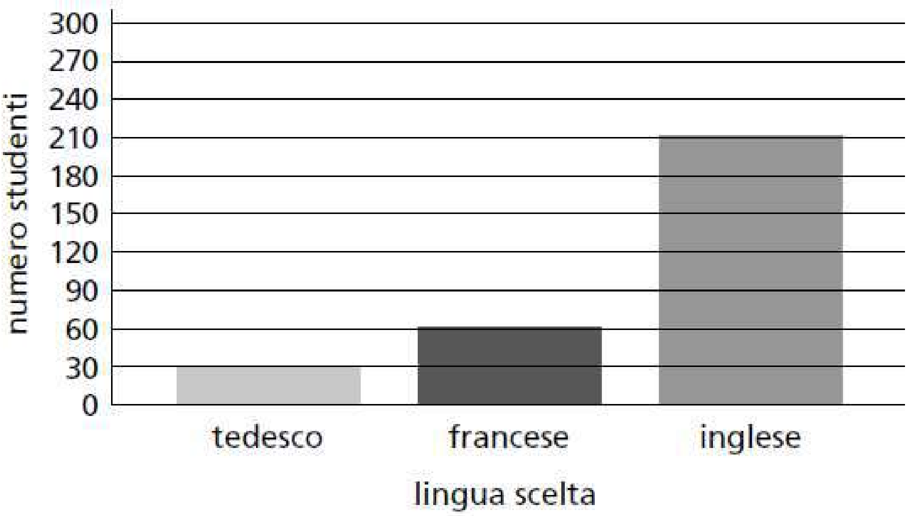
Scala

2) Gli istogrammi

Per rappresentare una serie di dati e renderli facilmente leggibili si possono usare dei diagrammi un esempio è l'istogramma.
Per costruire un istogramma si utilizzano rettangoli aventi tutti la stessa base ed una altezza proporzionale alla quantità che rappresentano. Ad esempio con i dati della tabelle seguente

Numero studenti	Lingua prescelta
30	tedesco
60	francese
210	inglese

si può costruire questo istogramma.



3) Proporzioni

Quattro numeri formano una proporzione se il rapporto tra il primo e il secondo è uguale al rapporto tra il terzo e il quarto.

Una proporzione si può rappresentare nei seguenti modi:

$$a : b = c : d \quad \text{oppure} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Ricorda

a, b, c e d sono **i termini della proporzione**
a e d si dicono anche **estremi**
a e c si dicono anche **antecedenti**
b e d si dicono anche **conseguenti**
d si dice anche **quarto proporzionale dopo i primi tre**

Proporzione continua: è una proporzione in cui i medi sono uguali
Ognuno due medi è detto **medio proporzionale**.

$$a : b = b : d \quad \text{ovvero} \quad b^2 = a \cdot d$$

Proprietà fondamentale delle proporzioni
il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi. In formula

$$a : b = c : d \quad \Rightarrow \quad ad = bc$$

Vale anche la **proprietà inversa**:

Quattro numeri dati in un certo ordine formano una proporzione se il prodotto del primo per il quarto è uguale al prodotto del secondo per il terzo e il secondo e il quarto numero sono diversi da zero.

La proprietà inversa fornisce un criterio per verificare se quattro numeri, dati in un certo ordine, formano una proporzione.

Calcolo del termine incognito di una proporzione:

In ogni proporzione un estremo incognito è uguale al prodotto dei medi diviso per l'altro estremo. Lo stesso vale per i medi.

Quindi

$$a : b = c : d \qquad d = \frac{bc}{a} \qquad a = \frac{bc}{d}\ , \quad b = \frac{ad}{c}\ , \quad c = \frac{ad}{b}$$

Altre proprietà delle proporzioni

Proprietà dell'invertire

Data una quaterna proporzionale, se ne ottiene un'altra scambiando tra loro ogni antecedente con il proprio conseguente:

$$a : b = c : d \quad \Rightarrow \quad b : a = d : c$$

Proprietà del permutare

Data una quaterna proporzionale se ne ottiene un'altra scambiando tra loro o i medi o gli estremi:

$$a : b = c : d \quad \Rightarrow \quad a : c = b : d, \quad d : b = c : a, \quad d : c = b : a$$

Proprietà del comporre

In ogni quaterna proporzionale la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come ogni antecedente sta al proprio conseguente:

$$a : b = c : d \quad \Rightarrow \quad (a + c) : (b + d) = a : b, \quad (a + c) : (b + d) = c : d$$

Proprietà dello scomporre

In ogni quaterna proporzionale la differenza degli antecedenti sta alla differenza dei conseguenti come ogni antecedente sta al proprio conseguente:

$$a : b = c : d \quad \Rightarrow \quad (a - c) : (b - d) = a : b, \quad (a - c) : (b - d) = c : d$$

Applicazioni delle proporzioni

1) Risoluzione di problemi con le proporzioni

a) Problemi in cui compaiono due grandezze variabili direttamente proporzionali

Questo tipo di problemi è detto del tre semplice diretto

Esempio: Se il prezzo di 1 kg di petto di pollo costa 8,00 euro al kilogrammo (1000 g) quale sarà il prezzo di 350 g?
Prezzo e quantità sono le due variabili e sono direttamente proporzionali.

Possiamo compilare la seguente tabella:

Quantità (g)		Prezzo (€)	
1000	↑	8,00	↑
350		y	

tenendo conto che:

a) la grandezza di cui deve essere calcolato il valore è posta nella seconda colonna,
b) sulla prima riga sono scritti i due valori corrispondenti noti
c) sulla seconda riga sono scritti i valori corrispondenti di cui uno è quello incognito

d) la freccia a fianco dei valori della grandezza a cui appartiene il valore incognito deve avere il verso dal valore incognito a quello noto

e) se le frecce hanno entrambe lo stesso verso significa che i valori delle due grandezze sono direttamente proporzionali.

A questo punto è possibile scrivere la seguente proporzione:

$350 : 1000 = y : 8,00$

E, applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni, calcolare il valore di y:

$$y = \frac{350 \cdot 8,00}{1000} = 2,80$$

Quindi 350 g di petto di pollo costano 2,80 euro.

b) Problemi in cui compaiono due grandezze variabili inversamente proporzionali

Questo tipo di problemi è detto del tre semplice inverso

Esempio: Con il vino contenuto in una botte si possono riempire 60 bottiglioni da 2 L l'uno; quante bottiglie da 0,75 L l'una si potrebbero riempire?

Capacità dei recipienti e numero dei recipienti sono inversamente proporzionali.
Possiamo compilare la seguente tabella:

Capacità (L)		Numero recipienti	
2	↓	60	↑
0,75		y	

Le due frecce di verso opposto indicano che le due grandezze sono inversamente proporzionali.

In questo caso nell'impostare la proporzione bisogna ricordare che il rapporto tra i due valori della capacità è uguale al rapporto inverso tra i corrispondenti valori che indicano il numero dei recipienti.

$2 : 0,75 = y : 60$

e $y = \frac{2 \cdot 60}{0,75.} = 160$ quindi si possono riempire 160 bottiglie da 0,75 L

c) Problemi in cui compaiono tre o più grandezze variabili

Questi problemi sono detti del tre composto. In essi intervengono tre o più grandezze dipendenti tra loro in modo tale che, a due a due, sono direttamente o inversamente proporzionali.

Esempio Tre robot in 20 minuti verniciano la carrozzeria di 6 macchine; in quanto tempo 5 robot verniceranno la carrozzeria di 11 macchine dello stesso tipo.

Per risolvere questo problema si può costruire una tabella con i valori delle tre grandezze dipendenti tra loro: numero robot, numero macchine, tempo (minuti). L'incognita X è il numero di minuti impiegati da 5 robot per verniciare 11 macchine.

Robot (numero)		macchine (numero)		tempo (minuti)	
3	↓	6	↑	20	↑
5		11		x	

Nel costruire la tabella si deve tenere conto che:

a) la grandezza incognita occupa l'ultima colonna;
b) i tre numeri nella prima riga sono i valori corrispondenti noti delle tre grandezze;
c) nella seconda riga sono riportati i tre valori corrispondenti delle tre grandezze di cui uno incognito;
d) a fianco della colonna della grandezza di cui uno dei valori è incognito viene tracciata una freccia rivolta dal valore incognito X al valore noto;
e) si confrontano ciascuna delle altre due grandezze con quella di cui si deve determinare il valore incognito per stabilire se sono direttamente o inversamente proporzionali ad essa;
f) si traccia a fianco di ciascuna colonna una freccia avente lo stesso verso o verso opposto rispetto a quella già tracciata a seconda che si tratti, rispettivamente, di proporzionalità diretta o inversa tra le due grandezze confrontate.

Si risolve infine il problema ricordando che

Il valore incognito della grandezza è uguale al prodotto del valore noto di tale grandezza, moltiplicato per i rapporti diretti dei valori delle grandezze inversamente proporzionali e per i rapporti inversi dei valori direttamente proporzionali alla grandezza di cui un valore è incognito.

In questo caso quindi

$$X = 20 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{11}{6} = 22$$

Vale a dire 5 robot impiegano 22 minuti per verniciare 11 macchine.

2) Percentuali

La **percentuale** è un particolare rapporto tra due grandezze *a* e *b* espresso in centesimi.

Si ottiene moltiplicando per 100 il rapporto a/b e ponendo a fianco il simbolo %. Quindi $\frac{a}{b} \cdot 100\%$

Esempio: se la percentuale di studenti promossi è il 70 % significa che su 600 alunni 420 sono stati promossi.

Ricorda

70% è il **tasso percentuale**
420 è la **percentuale totale**
600 è il **numero su cui si deve calcolare la percentuale totale**

La percentuale viene spesso utilizzata in statistica. Indicando con **P** la percentuale totale, con **r** il tasso percentuale e con **N il** numero sui cui si deve calcolare la percentuale totale, è possibile impostare la seguente proporzione :

$$r : 100 = P : N$$

Si possono presentare i seguenti **casi problematici**

a) Calcolare la percentuale totale (P) noti r e N	$\mathbf{P = \frac{N \cdot r}{100}}$
b) Calcolare il tasso percentuale (r) noti P e N	$\mathbf{r = \frac{P \cdot 100}{N}}$
c) Calcolare il numero totale (N) noti r e P	$\mathbf{N = \frac{P \cdot 100}{r}}$

Esempi

a) Ho acquistato un paio di pantaloni in saldo con uno sconto del 30% sul prezzo iniziale che era di 70 euro. Quanto ho risparmiato?

r = 30% N= 70 euro P?

30 : 100 = P : 70 $P = \frac{70 \cdot 30}{100} = 21$ euro Ho risparmiato 21 euro.

b) Se su 325 impiegati di un'azienda ci sono 65 assenti per malattia, qual è la percentuale degli impiegati assenti per malattia ?

N=325 P= 65 r?

r : 100 = 65 : 325 $r = \frac{65 \cdot 100}{325} = 20\%$

c) Se il prezzo di un capo di abbigliamento posto in saldo è di 15 euro, corrispondenti al 75% del prezzo originale (sconto 25%), quale era il prezzo originale?

P=15 euro r= 75 % N ?

75 : 100 = 15 : N $N = \frac{15 \cdot 100}{75} = 20$ euro

3) Il diagramma a torta

I diagrammi circolari o a torta detti anche areogrammi sono molto utili per rappresentare i dati di un fenomeno espressi in percentuale.

Impostando tante proporzioni quanti sono i dati che devono essere rappresentati è possibile ricavare l'ampiezza di ciascuna della fette in cui è suddiviso il diagramma.

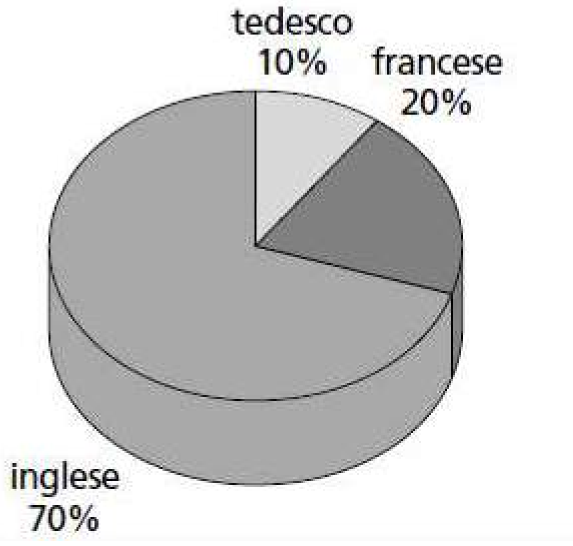
Come si costruisce una digramma a torta?

Un diagramma a torta si costruisce in questo modo:
- si calcola la somma totale dei dati;
- si esprime in percentuale il rapporto fra il valore di un singolo dato e la somma totale;
- si suddivide l'area di un cerchio in settori circolari in modo che gli angoli al centro siano proporzionali alle quantità che essi rappresentano; in tal modo le aree dei settori risultano proporzionali alle percentuali rappresentate.

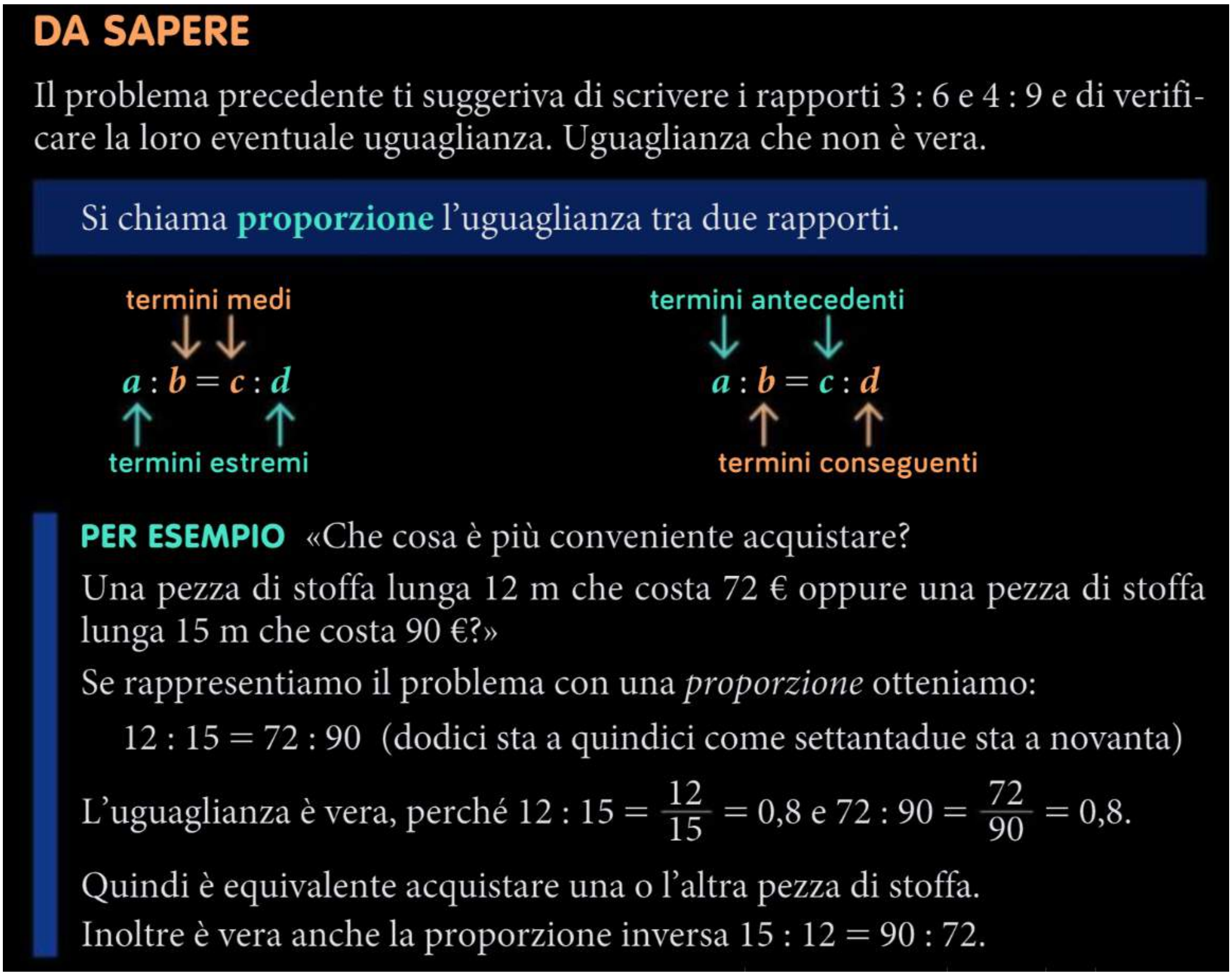
Esempio Con i dati riportati nella seguente tabella

Lingua prescelta	Numero studenti	Percentuale
tedesco	30	10%
francese	60	20%
inglese	210	60%

è possibile costruire questo diagramma a torta



PROPORZIONI



DA SAPERE

Il problema precedente ti suggeriva di scrivere i rapporti 3 : 6 e 4 : 9 e di verificare la loro eventuale uguaglianza. Uguaglianza che non è vera.

Si chiama **proporzione** l'uguaglianza tra due rapporti.

termini medi
↓ ↓
$a : b = c : d$
↑ ↑
termini estremi

termini antecedenti
↓ ↓
$a : b = c : d$
↑ ↑
termini conseguenti

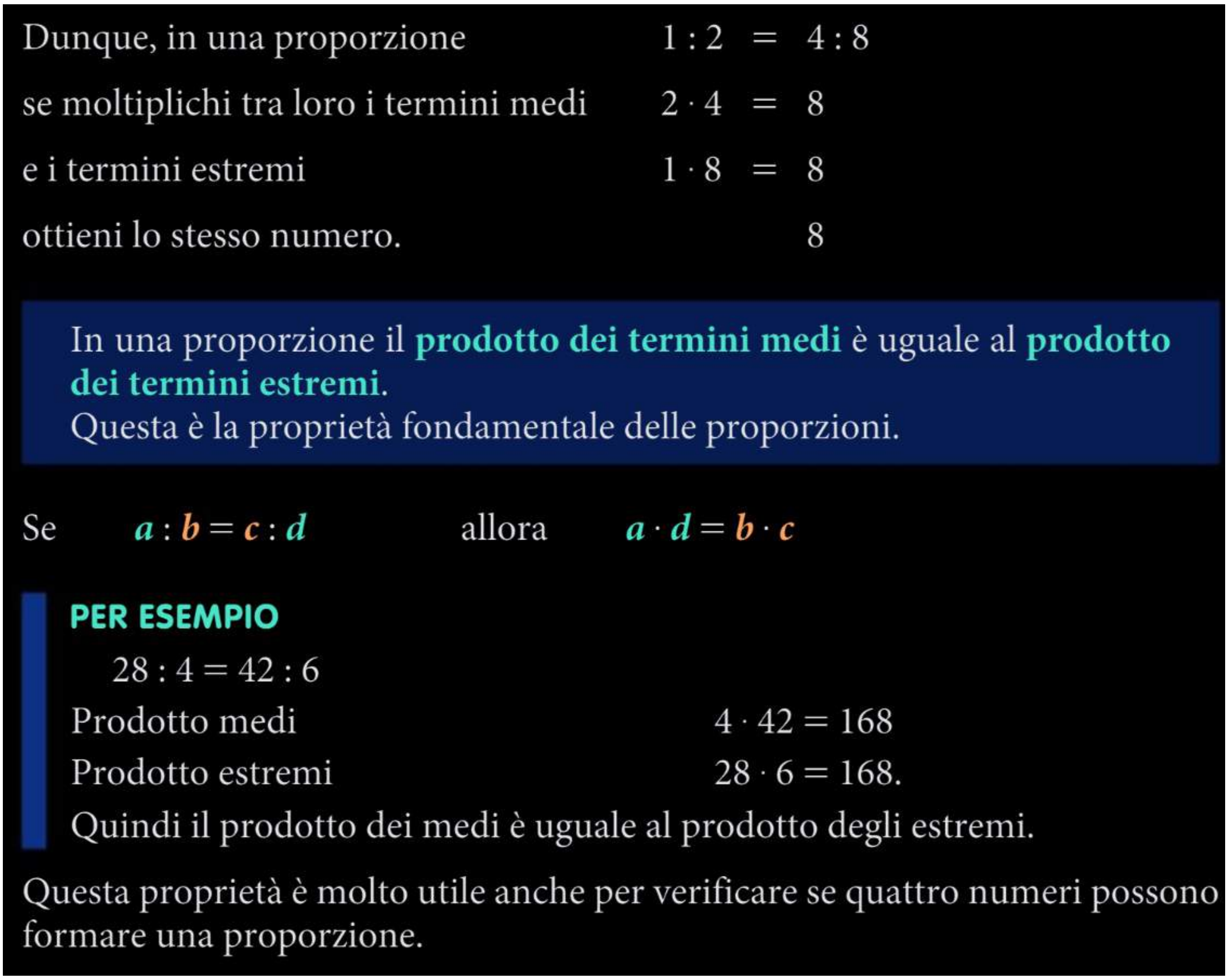
PER ESEMPIO «Che cosa è più conveniente acquistare?
Una pezza di stoffa lunga 12 m che costa 72 € oppure una pezza di stoffa lunga 15 m che costa 90 €?»

Se rappresentiamo il problema con una *proporzione* otteniamo:

$12 : 15 = 72 : 90$ (dodici sta a quindici come settantadue sta a novanta)

L'uguaglianza è vera, perché $12 : 15 = \frac{12}{15} = 0{,}8$ e $72 : 90 = \frac{72}{90} = 0{,}8$.

Quindi è equivalente acquistare una o l'altra pezza di stoffa.
Inoltre è vera anche la proporzione inversa $15 : 12 = 90 : 72$.



Dunque, in una proporzione $1 : 2 = 4 : 8$

se moltiplichi tra loro i termini medi $2 \cdot 4 = 8$

e i termini estremi $1 \cdot 8 = 8$

ottieni lo stesso numero. 8

> In una proporzione il **prodotto dei termini medi** è uguale al **prodotto dei termini estremi**.
> Questa è la proprietà fondamentale delle proporzioni.

Se $a : b = c : d$ allora $a \cdot d = b \cdot c$

PER ESEMPIO

$28 : 4 = 42 : 6$

Prodotto medi $4 \cdot 42 = 168$

Prodotto estremi $28 \cdot 6 = 168.$

Quindi il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

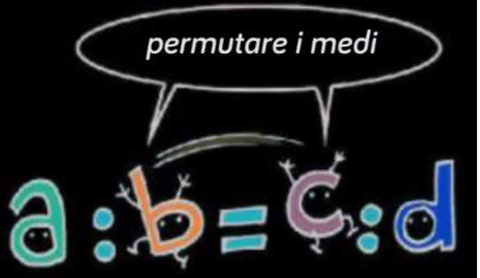
Questa proprietà è molto utile anche per verificare se quattro numeri possono formare una proporzione.

Proprietà del permutare

- Una proporzione rimane valida se si scambiano tra loro i medi.

15 : **5** = **30** : 10 ↔ 15 : **30** = **5** : 10

Infatti (5 · 30) = (15 · 10) = (30 · 5) =
= (15 · 10) = 150



- Una proporzione rimane valida se si scambiano tra loro gli estremi.

36 : 6 = 72 : **12** ↔ **12** : 6 = 72 : **36**

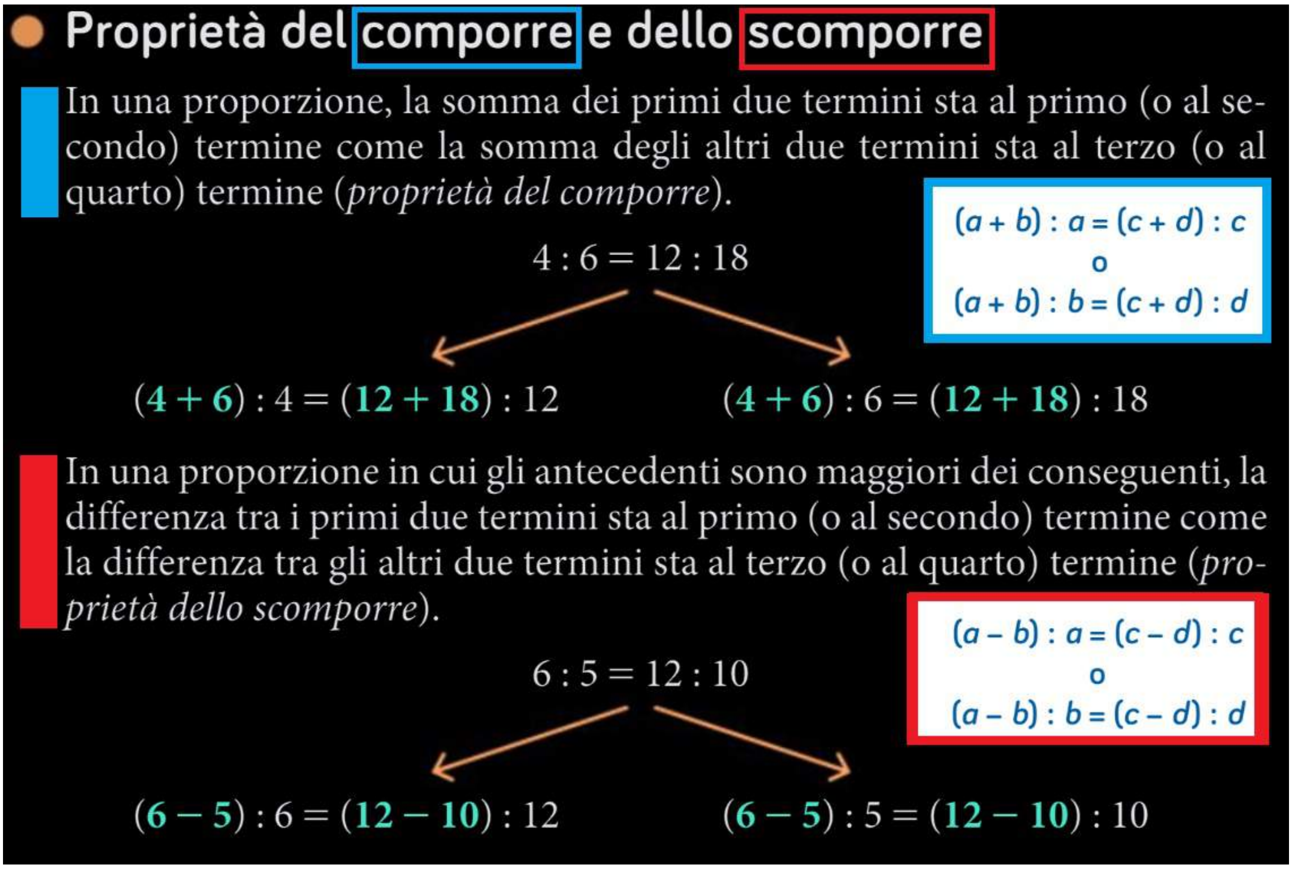
Infatti (6 · 72) = (36 · 12) = (6 · 72) =
= (12 · 36) = 432

Proprietà dell'invertire

- Una proporzione rimane valida se si scambia ogni antecedente con il proprio conseguente.

25 : **5** = **75** : **15** ↔ **5** : **25** = **15** : **75**

Infatti (5 · 75) = (25 · 15) = (25 · 15) =
= (5 · 75) = 375



Proprietà del comporre e dello scomporre

In una proporzione, la somma dei primi due termini sta al primo (o al secondo) termine come la somma degli altri due termini sta al terzo (o al quarto) termine (*proprietà del comporre*).

$$(a+b):a=(c+d):c$$

o

$$(a+b):b=(c+d):d$$

$$4:6=12:18$$

$$(4+6):4=(12+18):12 \qquad (4+6):6=(12+18):18$$

In una proporzione in cui gli antecedenti sono maggiori dei conseguenti, la differenza tra i primi due termini sta al primo (o al secondo) termine come la differenza tra gli altri due termini sta al terzo (o al quarto) termine (*proprietà dello scomporre*).

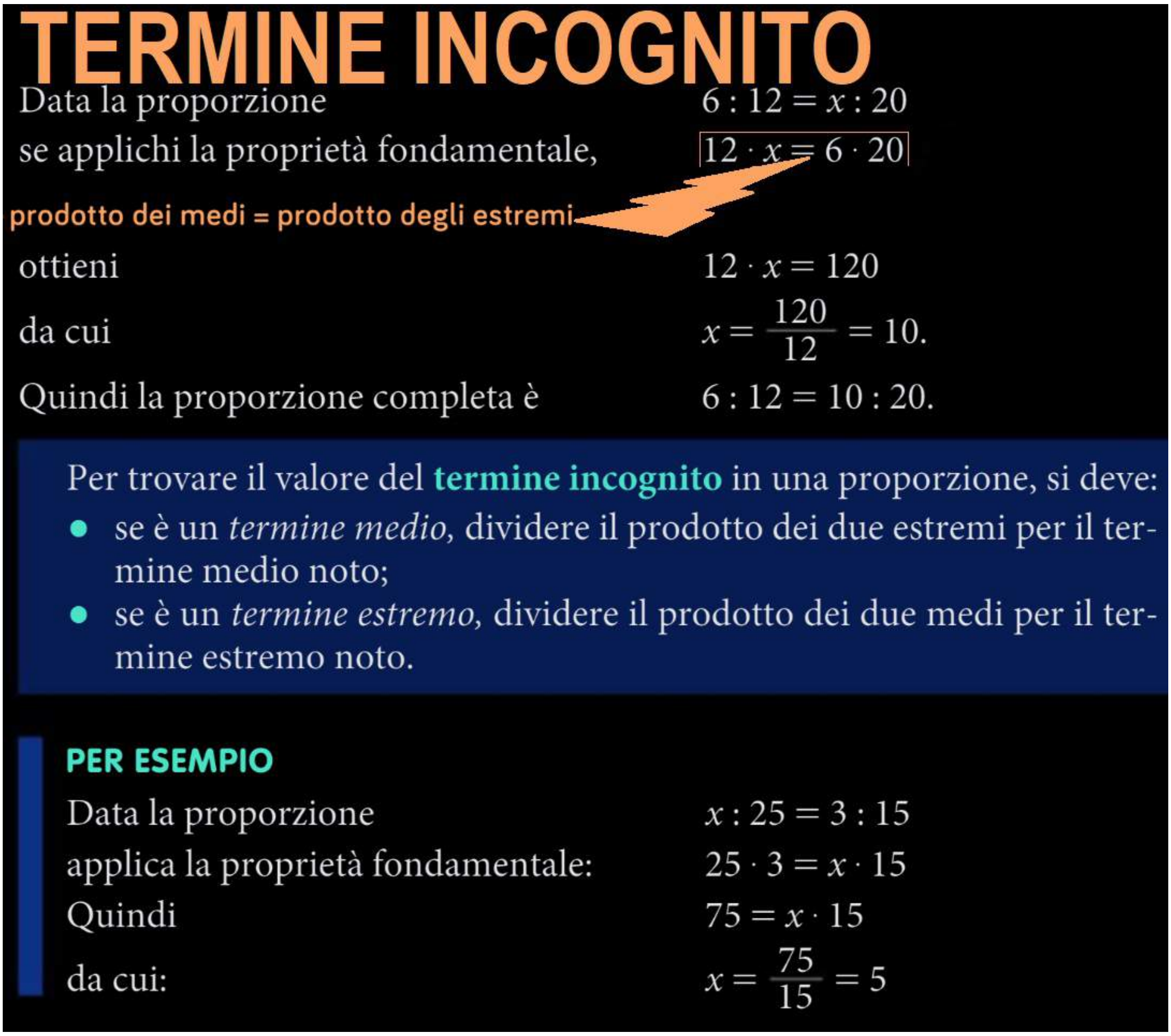
$$(a-b):a=(c-d):c$$

o

$$(a-b):b=(c-d):d$$

$$6:5=12:10$$

$$(6-5):6=(12-10):12 \qquad (6-5):5=(12-10):10$$



TERMINE INCOGNITO

Data la proporzione $6 : 12 = x : 20$

se applichi la proprietà fondamentale, $\boxed{12 \cdot x = 6 \cdot 20}$

prodotto dei medi = prodotto degli estremi

ottieni $12 \cdot x = 120$

da cui $x = \dfrac{120}{12} = 10.$

Quindi la proporzione completa è $6 : 12 = 10 : 20.$

Per trovare il valore del **termine incognito** in una proporzione, si deve:

- se è un *termine medio*, dividere il prodotto dei due estremi per il termine medio noto;
- se è un *termine estremo*, dividere il prodotto dei due medi per il termine estremo noto.

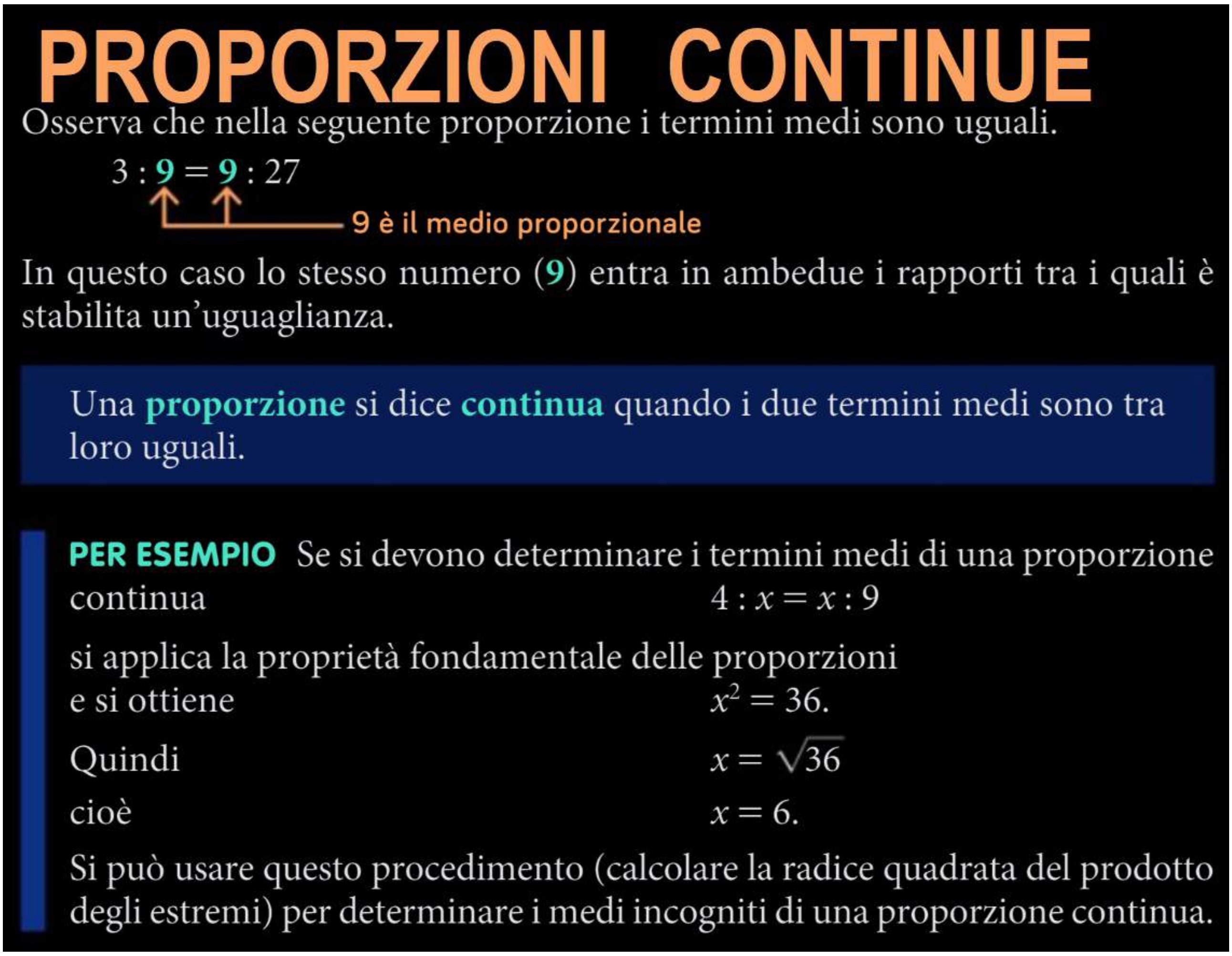
PER ESEMPIO

Data la proporzione $x : 25 = 3 : 15$

applica la proprietà fondamentale: $25 \cdot 3 = x \cdot 15$

Quindi $75 = x \cdot 15$

da cui: $x = \dfrac{75}{15} = 5$



PROPORZIONI CONTINUE

Osserva che nella seguente proporzione i termini medi sono uguali.

$$\underset{\uparrow}{3 : \mathbf{9}} = \underset{\uparrow}{\mathbf{9}} : 27$$

9 è il medio proporzionale

In questo caso lo stesso numero (**9**) entra in ambedue i rapporti tra i quali è stabilita un'uguaglianza.

> Una **proporzione** si dice **continua** quando i due termini medi sono tra loro uguali.

PER ESEMPIO Se si devono determinare i termini medi di una proporzione continua $4 : x = x : 9$

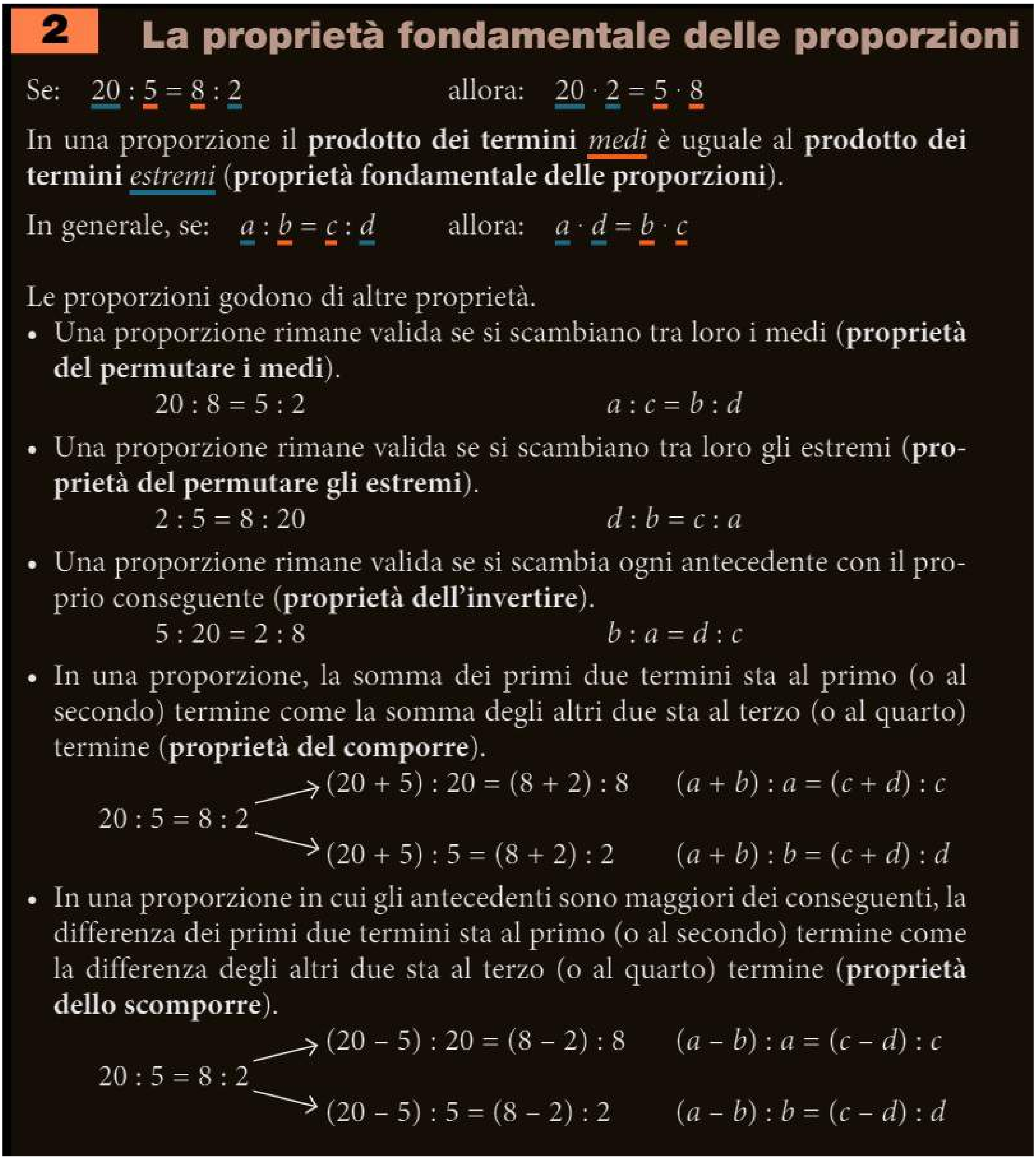
si applica la proprietà fondamentale delle proporzioni e si ottiene $x^2 = 36.$

Quindi $x = \sqrt{36}$

cioè $x = 6.$

Si può usare questo procedimento (calcolare la radice quadrata del prodotto degli estremi) per determinare i medi incogniti di una proporzione continua.

PROPORZIONI



2 La proprietà fondamentale delle proporzioni

Se: $\underline{20} : \underline{5} = \underline{8} : \underline{2}$ allora: $\underline{20} \cdot \underline{2} = \underline{5} \cdot \underline{8}$

In una proporzione il **prodotto dei termini** *medi* è uguale al **prodotto dei termini** *estremi* (**proprietà fondamentale delle proporzioni**).

In generale, se: $\underline{a} : \underline{b} = \underline{c} : \underline{d}$ allora: $\underline{a} \cdot \underline{d} = \underline{b} \cdot \underline{c}$

Le proporzioni godono di altre proprietà.

- Una proporzione rimane valida se si scambiano tra loro i medi (**proprietà del permutare i medi**).
  $20 : 8 = 5 : 2$ $a : c = b : d$
- Una proporzione rimane valida se si scambiano tra loro gli estremi (**proprietà del permutare gli estremi**).
  $2 : 5 = 8 : 20$ $d : b = c : a$
- Una proporzione rimane valida se si scambia ogni antecedente con il proprio conseguente (**proprietà dell'invertire**).
  $5 : 20 = 2 : 8$ $b : a = d : c$
- In una proporzione, la somma dei primi due termini sta al primo (o al secondo) termine come la somma degli altri due sta al terzo (o al quarto) termine (**proprietà del comporre**).

$$\begin{tikzcd} & (20 + 5) : 20 = (8 + 2) : 8 \\ 20 : 5 = 8 : 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & (20 + 5) : 5 = (8 + 2) : 2 \end{tikzcd}$$

$(a + b) : a = (c + d) : c$

$(a + b) : b = (c + d) : d$

- In una proporzione in cui gli antecedenti sono maggiori dei conseguenti, la differenza dei primi due termini sta al primo (o al secondo) termine come la differenza degli altri due sta al terzo (o al quarto) termine (**proprietà dello scomporre**).

$$\begin{tikzcd} & (20 - 5) : 20 = (8 - 2) : 8 \\ 20 : 5 = 8 : 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & (20 - 5) : 5 = (8 - 2) : 2 \end{tikzcd}$$

$(a - b) : a = (c - d) : c$

$(a - b) : b = (c - d) : d$

3 Come verificare se quattro numeri formano una proporzione

Devi decidere se i quattro numeri:

45 12 30 8

presi in questo ordine, possono formare una proporzione. Come puoi fare?

Ti può essere di aiuto la proprietà fondamentale:

dati quattro numeri *a*, *b*, *c*, *d*, essi formano in quest'ordine una proporzione se (e solo se):

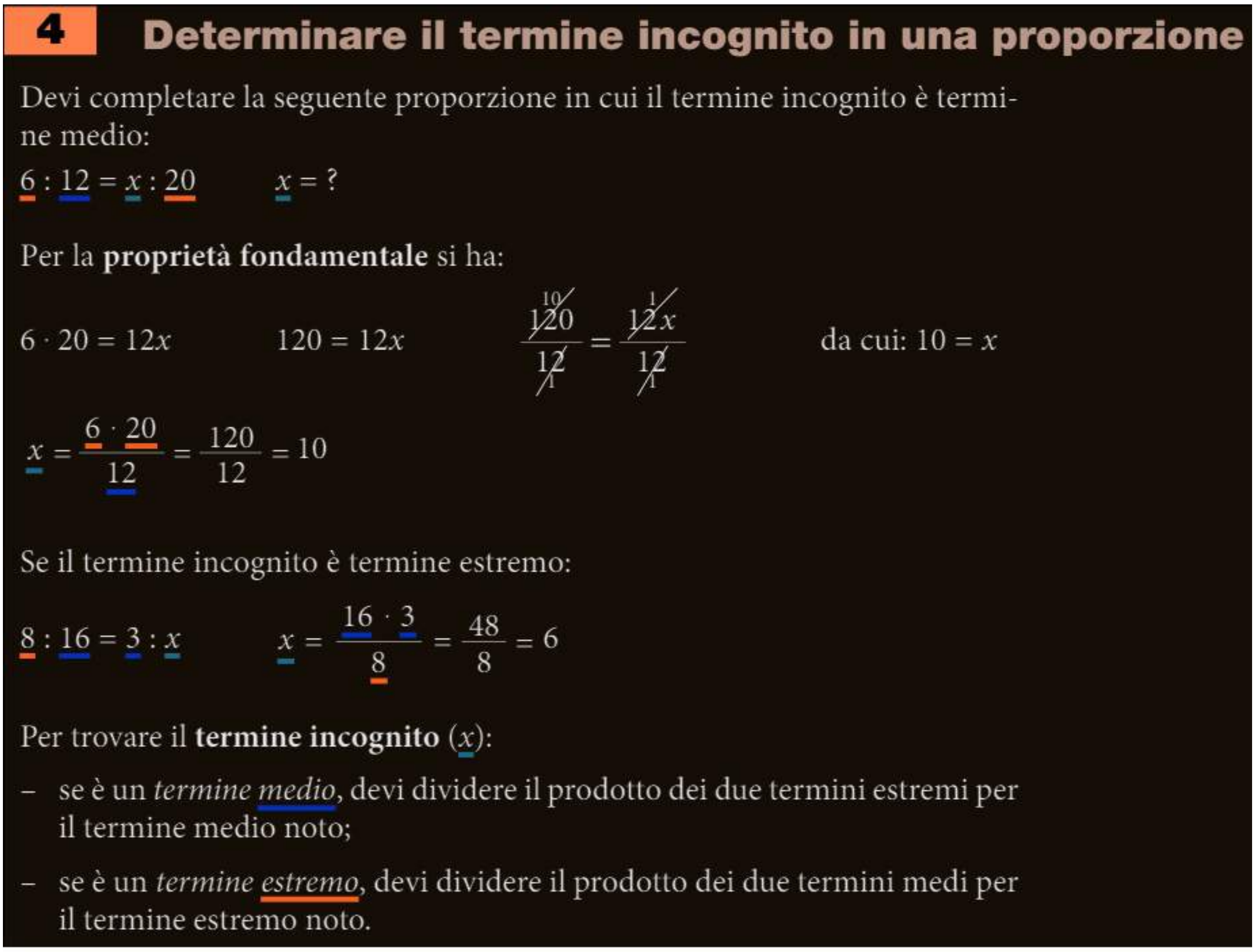
$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Per esempio i numeri 45, 12, 30, 8 (in quest'ordine) formano una proporzione perché:

$$45 \cdot 8 = 12 \cdot 30 = 360$$

I numeri 20, 15, 10, 6 (in quest'ordine) non formano una proporzione perché:

$$20 \cdot 6 = 120, \qquad 15 \cdot 10 = 150 \qquad \text{e} \qquad 120 \neq 150$$



4 Determinare il termine incognito in una proporzione

Devi completare la seguente proporzione in cui il termine incognito è termine medio:

$\underline{6} : \underline{12} = \underline{x} : \underline{20} \qquad \underline{x} = ?$

Per la **proprietà fondamentale** si ha:

$6 \cdot 20 = 12x \qquad 120 = 12x \qquad \dfrac{\cancel{120}^{10}}{\cancel{12}_{1}} = \dfrac{\cancel{12}^{1}x}{\cancel{12}_{1}} \qquad$ da cui: $10 = x$

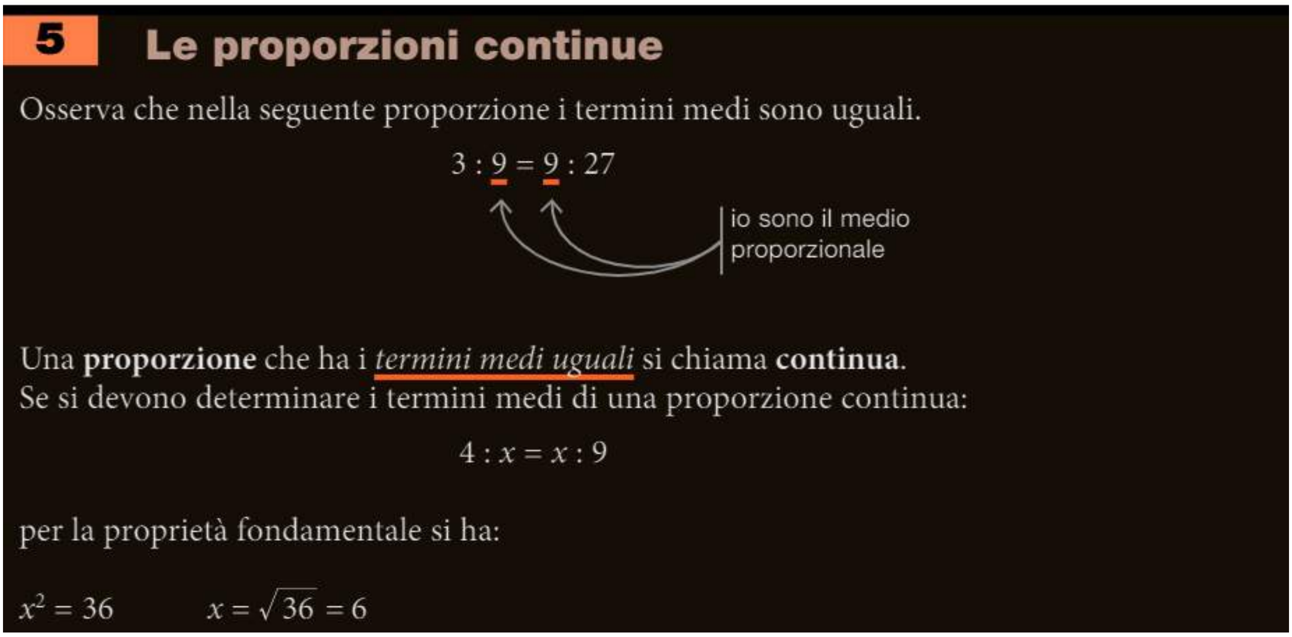
$$\underline{x} = \frac{\underline{6} \cdot \underline{20}}{\underline{12}} = \frac{120}{12} = 10$$

Se il termine incognito è termine estremo:

$\underline{8} : \underline{16} = \underline{3} : \underline{x} \qquad \underline{x} = \dfrac{\underline{16} \cdot \underline{3}}{\underline{8}} = \dfrac{48}{8} = 6$

Per trovare il **termine incognito** ($\underline{x}$):

- se è un *termine medio*, devi dividere il prodotto dei due termini estremi per il termine medio noto;
- se è un *termine estremo*, devi dividere il prodotto dei due termini medi per il termine estremo noto.



5 Le proporzioni continue

Osserva che nella seguente proporzione i termini medi sono uguali.

$$3 : \underline{9} = \underline{9} : 27$$

io sono il medio proporzionale

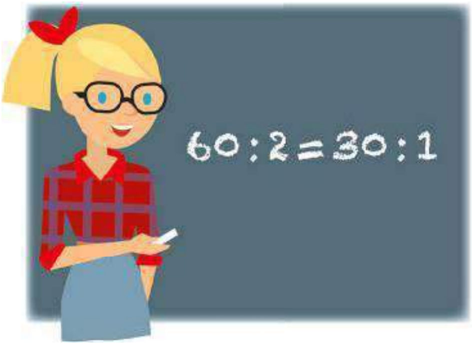
Una **proporzione** che ha i *termini medi uguali* si chiama **continua**.
Se si devono determinare i termini medi di una proporzione continua:

$$4 : x = x : 9$$

per la proprietà fondamentale si ha:

$x^2 = 36 \qquad x = \sqrt{36} = 6$

2 Rapporti e proporzioni



In questa Unità ti verranno presentati i concetti di rapporto e di proporzione; non sono concetti semplici e quindi ti consigliamo di soffermarti molto a riflettere su ogni argomento trattato.

Per renderti più facile l'apprendimento e per aiutarti a comprendere quanto spiegato, troverai moltissimi esempi.

Dopo avere analizzato ogni esempio, prova a farne tu un altro simile che spieghi ed esemplifichi quanto hai appena studiato. Alla fine di ogni paragrafo chiediti "che cosa ho capito?", prova a spiegare con le tue parole ciò che hai letto e cerca di fare degli esempi. Se ti sembra di avere delle incertezze rileggi con attenzione. È una strategia che funziona sempre!

Obiettivo: acquisizione del concetto di rapporto

Il **rapporto** è il risultato della divisione tra due numeri; il secondo numero deve essere diverso da 0 perché, come dovresti ricordare, non è possibile dividere un numero per 0.

Il primo termine della divisione si chiama **antecedente** e il secondo termine si chiama **conseguente**; il **valore del rapporto** è il risultato che si ottiene dividendo l'antecedente per il conseguente.

Esempio

5 : 2 = 2,5 → valore del rapporto

antecedente conseguente

Il rapporto tra due numeri può essere scritto in due modi diversi:

1 sotto forma di divisione (esempio 5 : 4)

2 sotto forma di frazione (esempio $\frac{5}{4}$)

Esercizi in autonomia

1. **Scrivi il rapporto tra 8 e 5 sotto forma di divisione e sotto forma di frazione.**
2. **Scrivi un rapporto i cui termini siano 9 e 8.**
3. **Scrivi un rapporto sotto forma di divisione in modo che abbia 12 come antecedente e 15 come conseguente.**

4. **Scrivi un rapporto sotto forma di frazione in modo che abbia 1 come antecedente e 9 come conseguente.**
5. **Calcola il valore del rapporto 7 : 2, dividendo l’antecedente per il conseguente.**
6. **Calcola il valore del rapporto 24 : 5, dividendo l’antecedente per il conseguente.**
7. **Calcola il valore del rapporto 9 : 4.**
8. **Calcola il valore del rapporto $\frac{50}{100}$.**
9. **Calcola il valore del rapporto $\frac{21}{7}$.**

Obiettivo: conoscere le proporzioni

Una proporzione è un’uguaglianza di due rapporti.

Esempio 9 : 18 = 7 : 14

Per scrivere una proporzione non è sufficiente porre un rapporto uguale a un altro, è necessario, infatti, che questi rapporti abbiano lo stesso valore.

Verifichiamo che l’esempio fatto in precedenza (9 : 18 = 7 : 14) rappresenti una proporzione.

Verifichiamo, quindi, che l’uguaglianza sia vera cioè che 9 : 18 sia uguale a 7 : 14

9 : 18 = 0,5

7 : 14 = 0,5

Le due divisioni danno lo stesso risultato quindi l’uguaglianza è vera:
pertanto 9 : 18 = 7 : 14 è una proporzione.

Esercizio svolto

10. **Stabilisci se la seguente uguaglianza è una proporzione.**

5 : 16 = 4 : 10
5 : 16 = 0,3125
4 : 10 = 0,4

I due rapporti hanno valori diversi quindi l’uguaglianza considerata non è una proporzione.

Esercizio guidato

11. **Stabilisci se la seguente uguaglianza è una proporzione.**

15 : 5 = 60 : 20

Calcola il risultato delle due divisioni che costituiscono l’uguaglianza:

15 : 5 = ……………………………………

60 : 20 = ……………………………………

Se i risultati sono uguali concludi che è una proporzione.
Se i risultati sono diversi concludi che non è una proporzione.

Che cosa concludi? ……………………………………………………………

Esercizi in autonomia

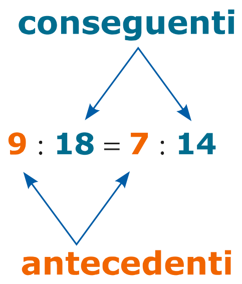
Stabilisci quali delle seguenti uguaglianze sono una proporzione.

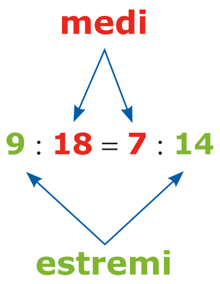
12. 16 : 12 = 20 : 5

13. 35 : 7 = 18 : 6

14. 2 : 10 = 5 : 20

I numeri che costituiscono una proporzione hanno un nome differente a seconda della posizione che occupano:





Un numero può essere indicato con nomi diversi, per esempio il numero 9 è sia un antecedente che un estremo, così come il numero 18 è sia un conseguente che un medio.

Esercizi in autonomia

15. **In una proporzione gli estremi sono 2 e 21, e i medi sono 6 e 7. Scrivi la proporzione.**

16. **In una proporzione i medi sono 2 e 24, e gli estremi sono 12 e 4. Scrivi la proporzione.**

17. **In una proporzione gli antecedenti sono 15 e 8, e i conseguenti sono 30 e 16. Scrivi la proporzione.**

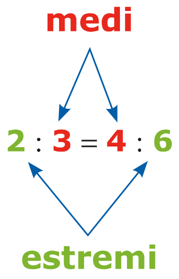
18. **In una proporzione i conseguenti sono 6 e 3, e gli antecedenti sono 48 e 24. Scrivi la proporzione.**

Obiettivo: conoscere la proprietà fondamentale delle proporzioni

Proprietà fondamentale
Il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

Esempio

Considera la proporzione seguente $2 : 3 = 4 : 6$



Ricorda!
Esistono due diversi simboli per indicare la moltiplicazione:

$$a \times b$$

$$a \cdot b$$

Applichiamo la proprietà e verifichiamo se il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi, cioè verifichiamo che:

$$3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$$

Svolgendo i calcoli otteniamo:

$12 = 12$ ovvero il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

Per capire se due rapporti formano una proporzione è possibile applicare la proprietà fondamentale. Se il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi i due rapporti formano una proporzione, altrimenti non siamo di fronte a una proporzione.

Esercizio svolto

19. Stabilisci se la seguente uguaglianza è una proporzione.

$15 : 45 = 20 : 50$

Confrontiamo il prodotto dei medi e quello degli estremi.

prodotto dei medi: $45 \cdot 20 = 900$

prodotto degli estremi: $50 \cdot 15 = 750$

Il prodotto dei medi è diverso dal prodotto degli estremi, quindi non è una proporzione.

Esercizio guidato

20. Stabilisci se la seguente uguaglianza è una proporzione.

15 : 3 = 40 : 8

Calcola il prodotto dei medi: ……………………………………

Calcola il prodotto degli estremi: ……………………………

Se i due risultati sono uguali concludi che l'uguaglianza è una proporzione.
Se i due risultati sono diversi concludi che l'uguaglianza non è una proporzione.

Che cosa concludi? ……………………………………………………………………

Esercizi in autonomia

Applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni, stabilisci quali delle seguenti uguaglianze formano una proporzione.

21. a. 2 : 3 = 6 : 9 **b.** 3 : 9 = 6 : 24 **c.** 7 : 21 = 2 : 6

22. a. 30 : 2 = 60 : 5 **b.** 10 : 3 = 50 : 15 **c.** 36 : 8 = 9 : 2

Obiettivo: sapere calcolare il termine incognito di una proporzione

La proprietà fondamentale delle proporzioni che hai appena studiato è molto utile per calcolare il termine incognito di una proporzione.

Ti starai chiedendo: che cos'è il termine incognito?
Una cosa incognita è qualcosa che non si conosce.

In matematica il termine incognito è quindi un termine della proporzione che non conosciamo e che, di solito, si indica con la lettera *x*.

Esempio

$3 : 15 = 2 : x \longrightarrow$ questo è il termine incognito che possiamo calcolare applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni

Ripasso

Proprietà fondamentale delle proporzioni → Il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi

Applichiamo la proprietà fondamentale delle proporzioni:

$$3 \cdot x = 2 \cdot 15$$

Svolgiamo la moltiplicazione a destra dell'uguale:

$$3 \cdot x = 30$$

Dividiamo entrambi i termini dell'uguaglianza per il numero che viene moltiplicato per la *x* (in questo caso 3):

$$\frac{3x}{3} = \frac{30}{3}$$

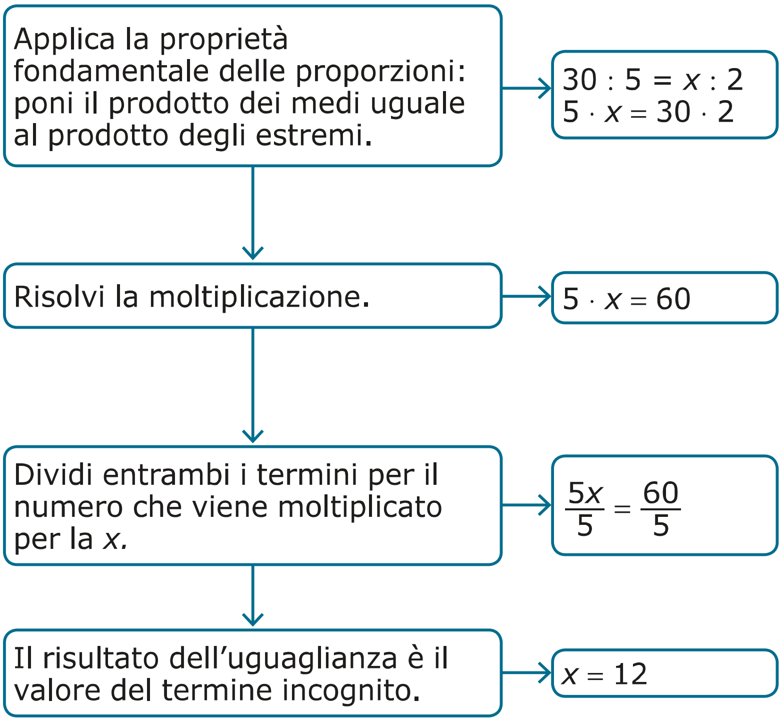
Semplifichiamo e otteniamo:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}x}{\cancel{3}_{1}} = \frac{\overset{10}{\cancel{30}}}{\cancel{3}_{1}} \qquad \text{cioè } x = 10$$

Il termine incognito della nostra proporzione è quindi 10 e la proporzione iniziale ($3 \cdot x = 2 \cdot 15$) diventa $3 : 15 = 2 : 10$

Per chi ha una buona memoria visiva

Schema per il calcolo del termine incognito



Applica la proprietà fondamentale delle proporzioni: poni il prodotto dei medi uguale al prodotto degli estremi.

$30 : 5 = x : 2$
$5 \cdot x = 30 \cdot 2$

Risolvi la moltiplicazione.

$5 \cdot x = 60$

Dividi entrambi i termini per il numero che viene moltiplicato per la *x*.

$\frac{5x}{5} = \frac{60}{5}$

Il risultato dell'uguaglianza è il valore del termine incognito.

$x = 12$

Esercizio guidato

23. Risolvi la seguente proporzione sul tuo quaderno seguendo le indicazioni.

$16 : x = 26 : 13$

1 Applica la proprietà fondamentale delle proporzioni: poni il prodotto dei medi uguale al prodotto degli estremi.

2 Svolgi la moltiplicazione che non contiene il termine incognito.

3 Dividi entrambi i termini per il numero che viene moltiplicato per la *x*.

Il risultato dell'uguaglianza è il valore del termine incognito.

$x =$

Esercizi in autonomia

Risolvi le seguenti proporzioni calcolando il termine incognito.

24. $2 : 3 = 4 : x$ [6]

25. $x : 12 = 5 : 6$ [10]

26. $15 : 10 = x : 6$ [9]

27. $6 : x = 15 : 25$ $30 : 35 = 6 : x$ [10; 7]

28. $15 : x = 3 : 5$ $10 : 14 = 15 : x$ [25; 21]

29. $20 : x = 5 : 7$ $8 : 3 = x : 15$ [28; 40]

30. $4 : x = 12 : 39$ $x : 4 = 85 : 20$ [13; 17]

31. $6 : 4 = x : 14$ $11 : 3 = 22 : x$ [21; 6]

32. $7 : x = 21 : 15$ $x : 100 = 4 : 16$ [5; 25]

33. $7 : 42 = x : 36$ $40 : 5 = 72 : x$ [6; 9]

34. $8 : x = 20 : 25$ $x : 80 = 12 : 48$ [10; 20]

35. $x : \frac{3}{10} = \frac{1}{3} : \frac{1}{8}$ $\frac{3}{5} : x = \frac{4}{15} : \frac{5}{18}$ $\left[\frac{4}{5}; \frac{5}{8}\right]$

36. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = x : \frac{1}{6}$ $\frac{8}{3} : \frac{16}{9} = \frac{18}{16} : x$ $\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$

37. $x : \frac{21}{4} = \frac{7}{4} : \frac{7}{16}$ $\frac{3}{2} : x = \frac{27}{2} : \frac{9}{4}$ $\left[21; \frac{1}{4}\right]$

38. $\frac{14}{5} : 7 = x : \frac{15}{4}$ $\frac{5}{6} : \frac{20}{9} = \frac{15}{16} : x$ $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$

39. $\frac{9}{7} : x = \frac{3}{10} : \frac{21}{5}$ $\frac{1}{4} : \frac{11}{3} = x : \frac{44}{9}$ $\left[18; \frac{1}{3}\right]$

Obiettivo: conoscere le nozioni fondamentali della riduzione e dell'ingrandimento in scala

scala 1:1.000.000

Nel tuo percorso scolastico avrai già studiato che nelle cartine l'immagine è ridotta in scala, cioè è rimpicciolita.

La scala può essere rappresentata sotto forma di frazione o sotto forma di rapporto.

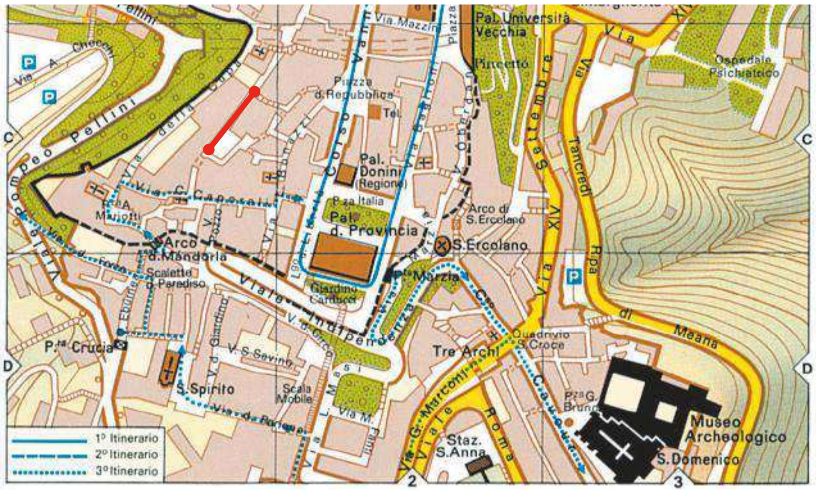
Esempio scala $\frac{1}{100}$ oppure scala $1:100$

Questo tipo di scrittura significa che un centimetro sulla carta equivale a 100 cm nella realtà.

Esercizi svolti

40. Due luoghi distano sulla carta 1 cm; se la cartina è in scala 1:8.000 quanto distano nella realtà?

Nella realtà i due luoghi distano 8.000 cm, cioè 80 m.



scala 1:8.000

Quando la distanza tra due luoghi è diversa dall'unità è utile utilizzare le proporzioni.

41. **Se su una cartina in scala 1:200 due luoghi sono distanti 5 cm, quanto distano nella realtà?**

Rappresentiamo questa informazione sotto forma di proporzione, assegnando l'incognita alla distanza reale tra i due punti:

$$1 : 200 = 5 : x$$

1 centimetro sulla carta

distanza reale corrispondente a 1 cm

5 centimetri sulla carta

distanza reale che vogliamo calcolare corrispondente a 5 cm sulla carta

Applichiamo la proprietà fondamentale delle proporzioni:

$$1 \cdot x = 200 \cdot 5$$

Calcoliamo l'incognita:

$$x = 1.000$$

I due punti distano 1.000 cm ovvero 10 m.

Negli esempi trattati fino a ora la scala ha rimpicciolito le dimensioni reali, ossia è stata applicata una riduzione in scala. Tuttavia è possibile ingrandire le misure reali facendo un ingrandimento.

Esempio

Scala 20:1 significa che 20 cm rappresentati nel disegno corrispondono a 1 cm nella realtà, quindi il disegno è 20 volte più grande dell'oggetto reale.

Esercizi in autonomia

42. **Un disegno riproduce un oggetto in scala 1:25. Quale delle due affermazioni è vera?**

a. A 25 cm nella realtà corrisponde 1 cm sul disegno.

b. A 1 cm nella realtà corrispondono 25 cm sul disegno.

43. **Un disegno riproduce un oggetto in scala 50:1. Quale delle due affermazioni è vera?**

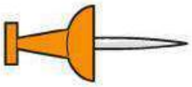
a. A 50 cm nella realtà corrisponde 1 cm sul disegno.

b. A 1 cm nella realtà corrispondono 50 cm sul disegno.

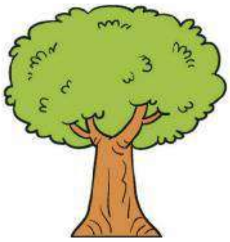
44. **Lo spillo è stato ingrandito con una scala uguale a 2:1. Misura con il righello la lunghezza dello spillo e calcola qual è la sua reale misura.** [2,5 cm]

45. La biro è stata disegnata con una scala uguale a 1:3. Misura con il righello la lunghezza della biro e calcola qual è la sua misura nella realtà. [15 cm]

46. La puntina da disegno è rappresentata in scala 5:1. Misura con il righello la puntina e calcola qual è la sua lunghezza reale. [0,5 cm]



47. Qual è l'altezza dell'albero nella realtà se la scala usata nel disegno è 1:200? Utilizza il righello per misurare l'altezza dell'albero. [6 m]



48. Un segmento è disegnato in scala 1:150. A quale lunghezza reale corrisponde 1 cm sul disegno? [150 cm]

Obiettivo: sapere applicare le proporzioni al calcolo della percentuale

Per calcolare le percentuali è molto utile utilizzare le proporzioni.

Esempio

Il cellulare dei tuoi sogni costa 400 euro. Oggi è in vendita con uno sconto del 30%. Quanto è lo sconto?

Per calcolare lo sconto si imposta la seguente proporzione:

$$\text{sconto : costo totale del cellulare} = \underset{\text{sconto espresso in \%}}{\swarrow 30} : \underset{\text{costo totale espresso in \%}}{100 \searrow}$$

Sostituiamo i dati del problema. Il termine incognito è lo sconto, ovvero ciò che voglio calcolare; gli altri dati li conosciamo e quindi li sostituiamo nella proporzione.

$x : 400 = 30 : 100$

Risolviamo la proporzione:

$$100 \cdot x = 400 \cdot 30$$

$$100 \cdot x = 12.000$$

$$\frac{100x}{100} = \frac{12.000}{100}$$

$$x = 120$$

Calcolando il valore del termine incognito si trova che oggi il cellulare è in vendita con uno sconto di 120 euro.

Esercizio guidato

49. Una bellissima felpa costava 50 euro, adesso è in saldo e viene venduta con uno sconto del 20%. Quanto è lo sconto? Qual è il prezzo scontato della felpa?

Per prima cosa è necessario stabilire qual è incognita, in questo caso è lo sconto che viene applicato.
Impostiamo la proporzione seguente sostituendo i numeri:

sconto espresso in percentuale : totale espresso in percentuale = sconto applicato (cioè la nostra incognita) : costo totale della felpa

Risolviamo la proporzione e avremo calcolato lo sconto che viene applicato alla felpa.

....

Sapendo che la felpa costava 50 euro e che adesso è venduta con lo sconto che abbiamo appena calcolato, calcoliamo il prezzo della felpa:

....

Esercizi in autonomia

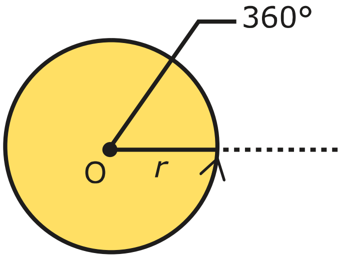
50. Tempo fa avevi visto uno zaino che ti interessava e che costava 60 euro; quando sei tornato al negozio per comprarlo ti hanno detto che il prezzo era aumentato del 10%.
Di quanto è aumentato il costo dello zaino?
Se hai portato con te 70 euro, puoi comprare lo zaino o i soldi non ti bastano?

51. Un videogioco che costa 60 euro è proposto con lo sconto del 15%. Quanto costa il videogioco?

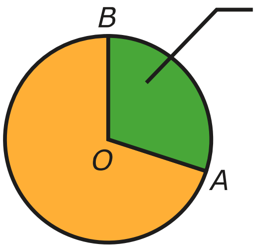
52. Sull'etichetta di una borsa in vendita è segnata la diminuizione del prezzo: da 80 euro a 70. Sulla stessa etichetta è scritto che la diminuzione corrisponde a uno sconto del 10%. È corretto?

Obiettivo: sapere applicare i concetti delle proporzioni al disegno di un areogramma

Ripasso



Angolo giro

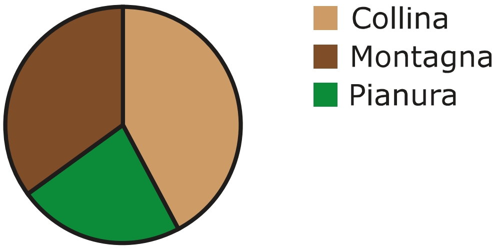


Settore circolare:
è una parte del cerchio
delimitata da due raggi

L'areogramma è anche chiamato grafico a torta ed è un tipo di rappresentazione che consente di visualizzare molto bene e molto facilmente alcuni tipi di dati e di informazioni.

Esempio

Territorio



Avrai riconosciuto il disegno sopra rappresentato perché lo avrai trovato moltissime volte nel libro di geografia.
Osservando il grafico ti risulta evidente che il territorio analizzato è per la maggior parte ricoperto da colline, per circa un quarto è pianeggiante e per la restante parte è montuoso.

Proviamo ora a sfruttare le proporzioni per costruire un areogramma partendo da un esempio concreto.

Esempio

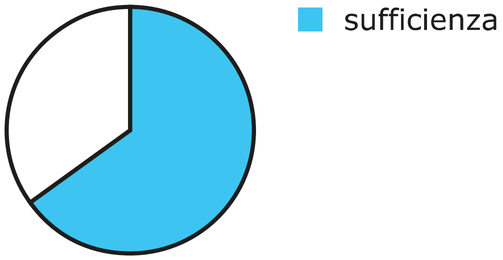
In una classe di seconda media l'insegnante di matematica ha consegnato una verifica e non è molto soddisfatto: infatti 15 studenti hanno raggiunto la sufficienza, 6 studenti hanno ottenuto un voto insufficiente e solo 3 hanno preso un ottimo voto.
Vogliamo rappresentare questi dati con un areogramma.

Calcoliamo il totale degli studenti:

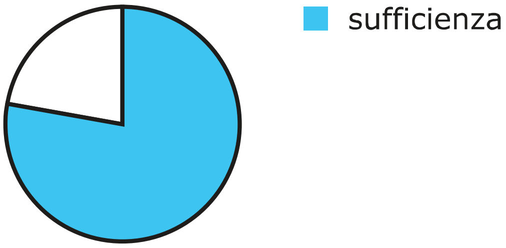
$$15 + 6 + 3 = 24$$

Per potere impostare l’areogramma dobbiamo sapere quanto sono ampi gli angoli delle fette che rappresentano i dati che vogliamo raffigurare.

Quanto sarà grande la fetta che rappresenta i ragazzi che hanno preso la sufficienza? Sarà grande così?



Oppure così?



Sicuramente sappiamo che sarà una fetta grande perché la maggior parte degli studenti ha preso la sufficienza. Per sapere con esattezza quanto è grande la fetta dobbiamo calcolare l’ampiezza dell’angolo; l’ampiezza dell’angolo è la nostra incognita.

$$15 : 24 = x : 360°$$

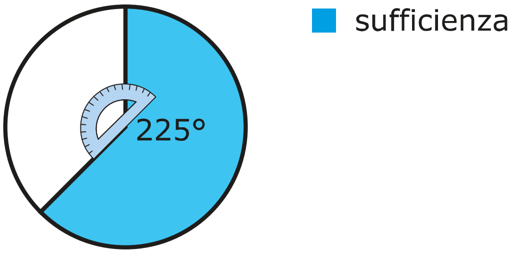
La proporzione indica sempre una parte rapportata all’intero solo che utilizza due modi diversi di rappresentarli: nel primo termine il gruppo che ha preso la sufficienza è messo in rapporto con il totale degli alunni; nel secondo termine l’ampiezza dell’angolo che vogliamo calcolare è messo in rapporto al totale dell’ampiezza dell’angolo, ovvero 360°.

Risolviamo la proporzione:

$$24 \cdot x = 360° \cdot 15 \longrightarrow 24 \cdot x = 5.400$$

$$x = \frac{5.400}{24} = 225°$$

Rappresentiamo, aiutandoci con il goniometro, un settore circolare che abbia l’angolo al centro di 225°.



Applicando lo stesso ragionamento calcoliamo quanto è ampia la fetta che rappresenta i ragazzi che hanno preso l'insufficienza.
Impostiamo la proporzione e ricordiamo che l'incognita rappresenta l'ampiezza dell'angolo al centro. Ricordiamo inoltre che i ragazzi che hanno preso insufficiente sono 6 e che il totale degli studenti è 24.

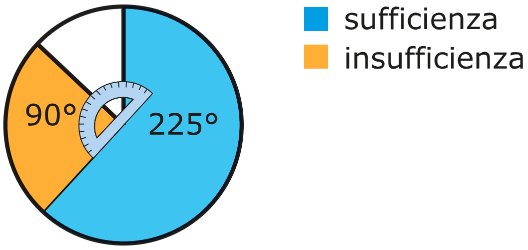
$$6 : 24 = x : 360°$$

$$24 \cdot x = 360° \cdot 6$$

$$x = \frac{2.160}{24}$$

$$x = 90°$$

In questo caso l'angolo al centro è pari a 90°, quindi sempre usando il goniometro rappresentiamo una fetta che abbia un'ampiezza di 90° e che rappresenti i ragazzi che hanno preso insufficiente.



La fetta che manca dovrebbe rappresentare i pochi fortunati che hanno preso un buon voto. Proviamo a verificare.
Studenti che hanno preso un buon voto: 3
Totale degli alunni: 24

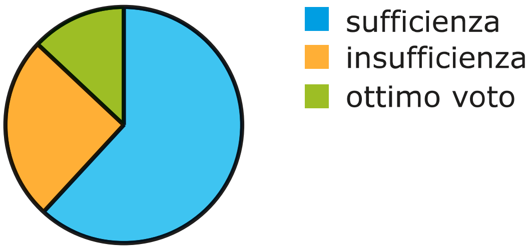
$$3 : 24 = x : 360$$

$$24 \cdot x = 360 \cdot 3$$

$$x = \frac{1.080}{24}$$

$$x = 45°$$

Verifica con il goniometro che la fetta avanzata è ampia 45°.
L'areogramma che hai appena costruito rappresenta in modo chiaro l'esito di questa disastrosa verifica di matematica.



Esercizi in autonomia

53. Rappresenta con un areogramma le seguenti informazioni.
Gli studenti della classe II B stanno scegliendo la meta per la loro gita scolastica. 18 studenti vorrebbero andare a Venezia, 5 vorrebbero andare sulle Dolomiti e 2 vorrebbero andare a Firenze.

54. Rappresenta con un areogramma i seguenti dati.
In una scuola media ci sono 100 studenti che stanno terminando la terza media; di questi 30 andranno in un liceo, 50 frequenteranno un istituto tecnico e 20 frequenteranno un corso di formazione professionale.

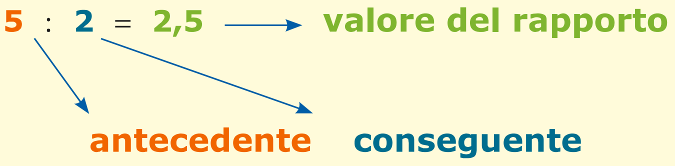
Nome ______________________________ Classe ______________

Formulario dello studente

2. Rapporti e proporzioni

1. Il **rapporto** è il risultato della divisione tra due numeri, in cui il secondo numero deve essere diverso da zero.

Esempio:

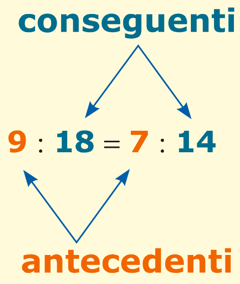


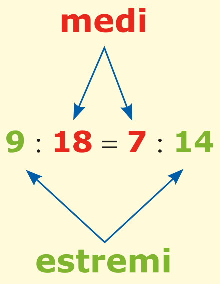
Il rapporto tra due numeri può essere scritto in due modi diversi:

1 sotto forma di divisione (esempio 5 : 4)

2 sotto forma di frazione (esempio $\frac{5}{4}$)

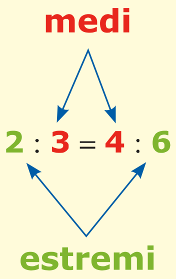
2. Una **proporzione** è l'uguaglianza tra due rapporti.





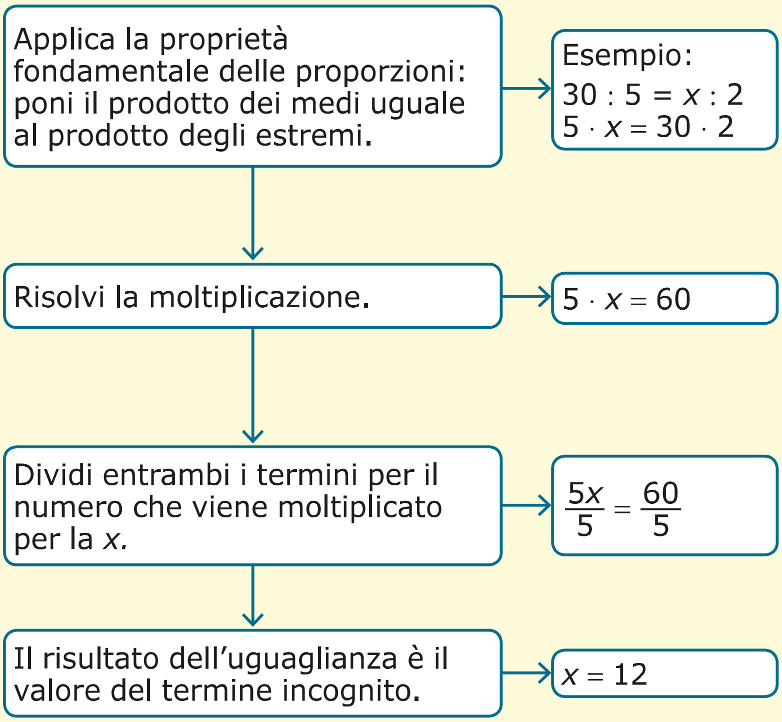
3. Proprietà fondamentale delle proporzioni: il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

Esempio: 2 : 3 = 4 : 6



quindi $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$ svolgendo i calcoli otteniamo che $12 = 12$

4. Calcolo del termine ignoto



Applica la proprietà fondamentale delle proporzioni: poni il prodotto dei medi uguale al prodotto degli estremi.

Esempio:
$30 : 5 = x : 2$
$5 \cdot x = 30 \cdot 2$

Risolvi la moltiplicazione.

$5 \cdot x = 60$

Dividi entrambi i termini per il numero che viene moltiplicato per la *x*.

$\frac{5x}{5} = \frac{60}{5}$

Il risultato dell'uguaglianza è il valore del termine incognito.

$x = 12$

Applicazione pratica: ingrandimenti e riduzioni in scala

Riduzione in scala: scala $\frac{1}{100}$ oppure scala 1:100

Questo tipo di scrittura significa che 1 cm sulla carta equivale a 100 cm nella realtà.

SCALA	CARTA	REALTÀ
$\frac{1}{100}$	1 cm	100 cm = 1 m
$\frac{1}{100\,000}$	1 cm	100 000 cm = 1 km

Ingrandimenti in scala: scala 20:1

Questa scrittura significa che 20 cm rappresentati nel disegno corrispondono a 1 cm nella realtà, quindi il disegno è 20 volte più grande dell'oggetto reale.

FATTORE	CARTA	REALTÀ
10:1	1 cm	0,1 cm = 1 mm
1000:1	1 cm	0,001 cm = 0,01 mm

Proporzioni

di Gianni Sammito

Definizione

Una *proporzione* è un'uguaglianza fra due rapporti, pertanto si scrive come

$$a:b=c:d$$

o equivalentemente come

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

e si legge a *sta a* b *come* c *sta a* d. I termini a e d si dicono *estremi*, i termini b e c si dicono *medi*. Inoltre i termini a e c si dicono *antecedenti*, mentre b e d si dicono *conseguenti*. Affinché la proporzione abbia un senso, deve (ovviamente) risultare $b,d\neq 0$.

Proprietà delle proporzioni

Proprietà fondamentale

La proprietà fondamentale delle proporzioni dice che il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi. Questo significa che se è vera

$$a:b=c:d$$

allora vale

$$a\cdot d=b\cdot c$$

Proprietà del comporre

La proprietà del comporre dice che, in ogni proporzione, la somma fra il primo e il secondo termine sta al primo (o al secondo), come la somma fra il terzo e il quarto sta al terzo (o al quarto). In formule, se è vera

$$a:b=c:d$$

allora sono vere anche le seguenti

$$(a+b):a=(c+d):c$$

$$(a+b):b=(c+d):d$$

a patto che, per quanto riguarda la prima relazione, risulti $a,c\neq 0$.

Proprietà dello scomporre

La proprietà dello scomporre dice che in ogni proporzione, la differenza fra il primo termine e il secondo sta al primo (o al secondo), come la differenza fra il terzo e il quarto sta al terzo (o al quarto). In formule, se è vera

$a:b=c:d$

allora sono vere anche le seguenti

$(a-b):a=(c-d):c$

$(a-b):b=(c-d):d$

a patto che, per quanto riguarda la prima relazione, risulti $a,c\neq 0$.

Proprietà del permutare

Data una proporzione, è ancora una proporzione quella ottenuta scambiando fra loro i medi e gli estremi. In altre parole, data

$a:b=c:d$

sono ancora proporzioni valide le seguenti

$a:c=b:d$
$d:b=c:a$

a patto che entrambe esistano (cioè $c,d\neq 0$ per quanto riguarda la prima, $b,a\neq 0$ per quanto riguarda la seconda).

Proprietà dell'invertire

Data una proporzione, è ancora una proporzione valida quella ottenuta scambiando ogni antecedente con il proprio conseguente. In altre parole, data

$a:b=c:d$

è ancora una proporzione valida

$b:a=d:c$

a patto che $a,c\neq 0$.

3.9 **IMPARO...**

Videolezione

Proporzioni continue

PENSA

ANNA IMPASTA 3 DL DI ACQUA CON 6 ETTI DI FARINA. SERENA IMPASTA 6 DL DI ACQUA CON 12 ETTI DI FARINA. ANNA TEME CHE IL SUO PANE VERRÀ MENO GUSTOSO DI QUELLO DI SERENA PERCHÉ HA A DISPOSIZIONE MENO FARINA.
È DAVVERO COSÌ?

Che rapporto c'è tra l'acqua e la farina usate da Anna? E tra quelle di Serena? Traduci questa situazione in una proporzione: che cosa noti?

Scriviamo la proporzione che traduce la situazione precedente:

$$3 : 6 = 6 : 12$$

Notiamo che i medi sono uguali. Una proporzione con questa caratteristica si chiama **proporzione continua**.

Una proporzione si dice **continua** se ha i medi uguali.

I termini di una proporzione continua prendono nomi particolari. Riferendoci al nostro esempio:

- il 3 viene chiamato normalmente **primo termine**;
- il 6, cioè il termine medio, è detto **medio proporzionale**;
- il 12, cioè il termine rimanente, è detto **terzo proporzionale** *dopo i numeri* 3 e 6.

Ricerca del medio proporzionale incognito

Vogliamo calcolare il valore incognito x del medio proporzionale nella proporzione continua:

$$4 : x = x : 16$$

Ricorda che l'operazione inversa dell'elevamento al quadrato di un numero è la radice quadrata.

Per raggiungere il nostro scopo applichiamo alla proporzione la proprietà fondamentale:

$$x \cdot x = 4 \cdot 16$$

cioè $x^2 = 4 \cdot 16$, da cui:

$$x = \sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{64} = 8$$

Quindi, il valore richiesto è **8**.

In ogni proporzione continua il **medio proporzionale incognito** è uguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi.

ESEMPI

a. $27 : x = x : 3 \qquad x = \sqrt{27 \cdot 3} = \sqrt{81} = 9$

b. $\frac{1}{2} : x = x : \frac{9}{8} \qquad x = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

PROVO

1 Tra le seguenti proporzioni continue ci sono due intrusi. Quali sono? Indicale con una crocetta. Quando una proporzione si dice continua?

a. 9 : 15 = 15 : 25 ☐   5 : 7 = 10 : 14 ☐   49 : 14 = 14 : 4 ☐

b. 1 : 11 = 2 : 22 ☐   4 : 10 = 10 : 25 ☐ $\frac{15}{4} : 3 = 3 : \frac{12}{5}$ ☐

2 Individua il medio proporzionale e il terzo proporzionale nella seguente proporzione continua: $x : 9 = 9 : 27$. Poi completa la frase.

Il medio proporzionale è il numero ....

Il numero 27 si chiama .... dopo i numeri .... e ....

3 Completa la seguente tabella, inserendo i termini richiesti o costruendo la proporzione con i termini dati. Verifica di volta in volta mediante la proprietà fondamentale che il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medi.

medio proporzionale = $\sqrt{\text{prodotto degli estremi}}$

proporzione	primo termine	medio proporzionale	terzo proporzionale
8 : 4 = 4 : 2			
	27	18	12
40 : 20 = 20 : 10			
36 : 30 = 30 : 25			
	52	26	13

4 Scrivi una proporzione che abbia come terzo proporzionale il numero 40 dopo i numeri 10 e 20.

5 Qual è il valore del medio proporzionale incognito della seguente proporzione? Barra la risposta corretta ed enuncia la regola per calcolare tale valore.

$18 : x = x : 8$ ☐ 6   ☐ 9   ☐ 12

6 Riconosci quali tra le seguenti frasi sono vere e quali false.

a. Paola: "La proporzione 4 : 6 = 6 : 9 è una proporzione continua." V F

b. Nico: "Nella proporzione 6 : 12 = 12 : 24 il numero 12 è il terzo proporzionale." V F

c. Claudio: "Nella proporzione 12 : 6 = 6 : 3 il medio proporzionale è il numero 6." V F

d. Valeria: "Per calcolare il medio proporzionale incognito di una proporzione continua si dividono tra loro gli estremi." V F

Prime competenze

7 Calcola il medio proporzionale e fai la verifica sostituendo alla x il suo valore.

✓ **ESERCIZIO GUIDATO**

$2 : x = x : 18$ $x = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$ verifica: $2 : 6 = 6 : 18$ è valida perché $\underbrace{2 \times 18}_{36} = \underbrace{6 \times 6}_{36}$

a. $20 : x = x : 5$

b. $8 : x = x : 2$

c. $11 : x = x : 44$

$16 : x = x : 36$

$28 : x = x : 7$

$1 : x = x : 64$

d. $4 : x = x : 16$

e. $81 : x = x : 4$

f. $36 : x = x : 25$

$80 : x = x : 5$

$6 : x = x : 24$

$27 : x = x : 12$

ESERCIZI → P. 137

Imparo il metodo

Videolezione

Applicazioni delle proprietà delle proporzioni

Vediamo come si possono risolvere alcuni problemi se si conoscono la somma e il rapporto di due dati oppure la differenza e il rapporto di due dati.

Se si conoscono la somma e il rapporto di due dati

PROBLEMA
Nel cortile di un condominio ci sono 10 animali domestici tra gatti e cani e il rapporto tra il numero dei gatti e il numero dei cani è di 2 a 3. Quanti sono i gatti e i cani?

RISOLUZIONE Indichiamo con x e y rispettivamente il numero dei gatti e il numero dei cani e scriviamo la proporzione:

$$x : y = 2 : 3$$

Applicando la proprietà del comporre, otteniamo:

$$(x + y) : x = (2 + 3) : 2$$

e anche:

$$(x + y) : y = (2 + 3) : 3$$

Sostituendo ora al posto di $x + y$ la somma nota, cioè 10, abbiamo:

$$10 : x = 5 : 2 \qquad e \qquad 10 : y = 5 : 3$$

da cui ricaviamo rispettivamente:

$$x = \frac{10 \cdot 2}{5} = \mathbf{4} \qquad e \qquad y = \frac{10 \cdot 3}{5} = \mathbf{6}$$

RISPOSTA Nel cortile di quel condominio ci sono 4 gatti e 6 cani.

Se si conoscono la differenza e il rapporto di due dati

PROBLEMA
Nell'armadio di Eleonora le T-shirt superano i jeans di 4 unità e il rapporto tra il numero delle T-shirt e il numero dei jeans è 5/3. Quante sono le T-shirt e quanti sono i jeans?

RISOLUZIONE Indichiamo con x e y rispettivamente il numero delle T-shirt e dei jeans e scriviamo la proporzione:

$$x : y = 5 : 3$$

Applicando la proprietà dello scomporre, abbiamo:

$$(x - y) : x = (5 - 3) : 5 \quad \text{e anche:} \quad (x - y) : y = (5 - 3) : 3$$

Sostituendo al posto di $x - y$ la differenza nota, ossia 4, otteniamo:

$$4 : x = 2 : 5 \qquad e \qquad 4 : y = 2 : 3$$

da cui ricaviamo rispettivamente:

$$x = \frac{4 \cdot 5}{2} = \mathbf{10} \qquad e \qquad y = \frac{4 \cdot 3}{2} = \mathbf{6}$$

RISPOSTA Le T-shirt sono 10 e i jeans 6.

Imparo il metodo

Completa la risoluzione dei seguenti problemi

1 Nella vetrina di un negozio sono esposte tute e felpe per un totale di 18 capi. Se le tute sono 4/5 delle felpe, quante sono le une e le altre?

Indico con x e y rispettivamente il numero delle .... e delle ....

Imposto la proporzione x : ....

Applico a essa la proprietà del comporre $(x + ...) : x = (........ + ...) : ....$ e ....

Sostituisco a $(x + ...)$ il numero 18 e ottengo $18 : x = ... : ....$ e ....

da cui ricavo il valore di x e di y: $x = \frac{.........}{.........}$ $y = \frac{.........}{.........}$

2 La differenza di età tra Michele e Fabrizio è di 6 anni e il rapporto tra le loro età è $\frac{5}{3}$. Calcola l'età di ciascun ragazzo.

Indico con x e y rispettivamente l'età di Michele e ....

Imposto la proporzione x : ....

Applico a essa la proprietà dello scomporre $(x - ....) : x = (........ - ....) : ....$ e ....

Sostituisco a $(x - ....)$ il numero 6 e ottengo $6 : x = ... : ....$ e ....

da cui ricavo il valore di x e di y: $x = \frac{.........}{.........}$ $y = \frac{.........}{.........}$

Risolvi i seguenti problemi

3 Claudia riceve in dono un mazzo di rose e girasoli. Il numero complessivo dei fiori è 21 e le rose sono 5/2 dei girasoli. Quante sono le rose? E i girasoli? [15; 6]

4 Nella sua cameretta, Cleo ha una mensola con tutti i suoi libri. La differenza tra i libri scolastici e i libri di lettura è di 10 unità e il loro rapporto è 7/2. Quanti sono i libri scolastici? E quelli di lettura? [14; 4]

Completa le seguenti tabelle

a.

rapporto di x e y	somma di due numeri x e y	valore dei due numeri
$x : y = 2 : 3$	$x + y = 10$	$x =$ .... $y =$ ....
$x : y = 3 : 2$	$x + y = 20$	....
$\frac{x}{y} = \frac{7}{2}$	$x + y = 45$	....

b.

rapporto di x e y	differenza di due numeri x e y	valore dei due numeri
$x : y = 10 : 7$	$x - y = 18$	$x =$ .... $y =$ ....
$x : y = 6 : 4$	$x - y = 12$	....
$\frac{x}{y} = \frac{7}{4}$	$x - y = 21$	....

3.10 **IMPARO...**

Videolezione

Proporzioni particolari

- Consideriamo la seguente proporzione *particolare* in cui compare più volte l'incognita.

  $(30 - x) : x = 26 : 13$

  Per determinare il numero x si applica la *proprietà del comporre*:

  $(30 - x + x) : x = (26 + 13) : 13$

  Nella prima parentesi si eliminano $-x$ e $+x$ perché hanno *valori opposti* e si scrive:

  $30 : x = 39 : 13$, da cui si ricava che: $x = \dfrac{\cancel{30}^{10} \times \cancel{13}^{1}}{\cancel{39}_{\cancel{3}_{1}}} = 10$

- Consideriamo un'altra proporzione.

  $(18 + x) : x = 36 : 9$

  Per risolvere la proporzione si applica la proprietà dello scomporre:

  $(18 + x - x) : x = (36 - 9) : 9$

  Si eliminano quindi $+x$ e $-x$ e si ricava:

  $18 : x = 27 : 9$

  $x = \dfrac{18 \times 9}{27} = 6$

Le due x hanno valori opposti.
La prima è negativa (segno meno),
la seconda positiva (segno più),
quindi è come scrivere:
$x - x = 0$

- Consideriamo un ultimo caso.

  $(7 - x) : 10 = x : 4$

  Per ricondurci alla situazione del primo esempio, occorre scambiare il 10 con la x. Si applica quindi la proprietà del permutare i medi:

  $(7 - x) : x = 10 : 4$

  Ora si può applicare la proprietà del comporre:

  $(7 - x + x) : x = (10 + 4) : 4$

  ed eliminare $+x$ e $-x$:

  $7 : x = 14 : 4$

  $x = \dfrac{7 \times 4}{14} = 2$

ESEMPIO $\left(\dfrac{1}{5} - x\right) : x = \dfrac{2}{5} : \dfrac{3}{2}$

Si applica la *proprietà del comporre*:

$\left(\dfrac{1}{5} - x + x\right) : x = \left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{2}\right) : \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{1}{5} : x = \dfrac{4 + 15}{10} : \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{1}{5} : x = \dfrac{19}{10} : \dfrac{3}{2}$ da cui: $x = \dfrac{\dfrac{1}{5} \times \dfrac{3}{2}}{\dfrac{19}{10}} = \dfrac{\dfrac{3}{10}}{\dfrac{19}{10}} = \dfrac{3}{\cancel{10}_{1}} \times \dfrac{\cancel{10}^{1}}{19} = \dfrac{3}{19}$

PROVO

1 Per calcolare il valore dell'incognita nella seguente proporzione si deve usare la proprietà del comporre o quella dello scomporre?

$(5 - x) : x = 2 : 8$

2 Quale proprietà delle proporzioni si deve utilizzare per calcolare il valore dell'incognita nella seguente proporzione?

$(7 + x) : x = 18 : 9$

3 Completa i seguenti esercizi.

a. $(24 - x) : x = 10 : 2$

$(24 - x + \ldots\ldots) : x = (10 + \ldots\ldots) : \ldots\ldots$

b. $(9 + x) : x = 20 : 5$

$(9 + x - \ldots\ldots) : x = (20 - \ldots\ldots) : \ldots\ldots$

4 Risolvi le seguenti proporzioni applicando opportunamente la proprietà del comporre o quella dello scomporre.

a. $(15 - x) : x = 10 : 20$ $\quad (6 - x) : x = 4 : 8$ $\quad 3 : 5 = (40 - x) : x$

b. $(33 + x) : x = 20 : 5$ $\quad (18 + x) : x = 42 : 6$ $\quad 14 : 6 = (12 + x) : x$

c. $(8 + x) : x = 22 : 6$ $\quad (11 - x) : x = 30 : 3$ $\quad (8 + x) : x = 15 : 11$

d. $(16 - x) : x = 2 : 6$ $\quad (10 + x) : x = 30 : 10$ $\quad 15 : 6 = (7 - x) : x$

5 Completa la seguente tabella, dopo aver scritto ciascuna delle proporzioni indicate.

1° termine	2° termine	3° termine	4° termine	valore dell'incognita
$8 + x$	x	15	11	....
15	6	$7 - x$	x	....
$10 + x$	x	21	7	....
$15 - x$	x	8	4	....
$13 + x$	x	30	4	....

6 Trova il valore della x in ciascuna delle seguenti proporzioni, dopo aver applicato la proprietà del permutare i medi.

✔ ESERCIZIO GUIDATO

$(7 - x) : 13 = x : 8$

Prima si applica la proprietà del permutare i medi e dopo quella del comporre:

$(7 - x) : x = 13 : 8 \qquad (7 - x + x) : x = (13 + 8) : 8 \qquad 7 : x = 21 : 8$

$$x = \frac{7 \times 8}{21} = \frac{8}{3}$$

a. $(4 + x) : 8 = x : 5$ $\qquad$ **b.** $x : 4 = (8 - x) : 2$

Prime competenze

7 Risolvi le seguenti proporzioni.

a. $\left(\frac{3}{4} - x\right) : x = \frac{1}{2} : \frac{2}{5}$ $\qquad$ **b.** $\left(\frac{17}{3} + x\right) : x = \frac{5}{3} : \frac{1}{4}$ $\qquad \left[\frac{1}{3};\ 1\right]$