RISORSE DIDATTICHE.

【ResearchGate Project】 *By … 0000-0001-5086-7401 & lnkd.in/erZ48tm*

Unità 5

Il piano cartesiano e le funzioni

Strumenti digitali dell'unità

- Videolezioni
- Esercizi di riepilogo
- Autoverifica
- Esercizi BES
- Esercizio svolto
- Esercizi per la classe virtuale

IL GIOCO DI GENIUS

TUTTI IN RIGA

Un interessante gioco di strategia, effettuabile su un semplice foglio di carta a quadretti, si svolge con le seguenti regole.

1. Dopo aver stabilito a chi spetta la prima mossa, il primo giocatore inserisce una croce in uno dei quadretti del foglio, a propria scelta.
2. Il secondo giocatore inserisce un cerchio in uno degli altri quadretti.
3. Successivamente, a turno, ognuno dei due giocatori inserisce il proprio simbolo in uno dei quadretti ancora liberi.
4. Vince chi per primo riesce ad allineare cinque propri simboli in orizzontale, in verticale o in diagonale, come evidenziato nell'esempio a lato (dalla casella B6 alla casella F2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
1										
2						x				
3			o		x		o		o	
4				x	o	o		x		
5			x		x	o	x	o	x	
6		x	x	o		x	o			
7	o	x	o							
8										
9										
10										

Ora osserva la figura a lato. In base alle regole descritte sopra, cerca di determinare in quale casella il primo giocatore (quello con le croci) deve porre il proprio simbolo per poter vincere la partita con certezza assoluta.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
1										
2										
3										
4	o	x	x	x	o	x				
5		o	o							
6				o			o	x		
7									x	
8										
9										
10										

Il sistema con cui si identifica una casella richiamando la riga e la colonna a cui appartiene è simile a quello con cui si individua un punto su un *piano cartesiano*, sistema di riferimento che approfondiremo in questa unità.

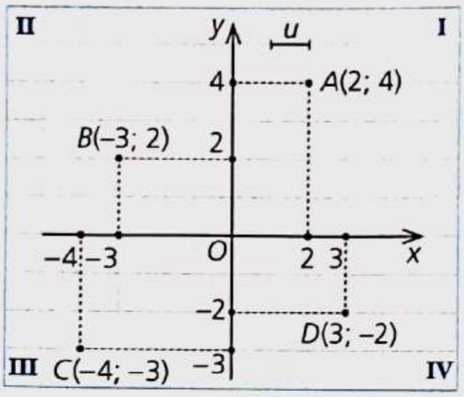
Se vuoi conoscere subito la risposta vai a p. 335.

Videolezione

Quadranti e punti particolari

PENSA

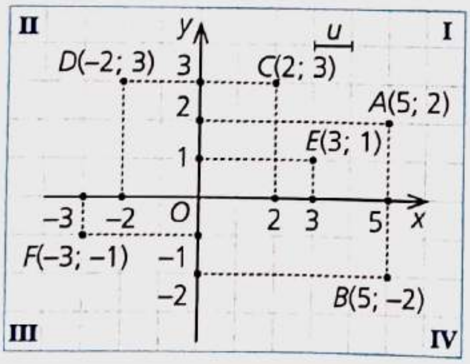
IN QUANTE PARTI RISULTA DIVISO UN PIANO CARTESIANO SE PROLUNGHIAMO L'ASSE X VERSO SINISTRA E L'ASSE Y VERSO IL BASSO? QUALI VANTAGGI PRESENTA QUEST'OPERAZIONE?



Prolungando l'asse x verso sinistra (verso negativo) e l'asse y verso il basso (verso negativo), il piano risulta diviso in quattro angoli retti che si chiamano **quadranti** I, II, III, IV, con il vantaggio che si può associare **a ogni coppia ordinata di numeri reali un punto del piano** e **viceversa**.

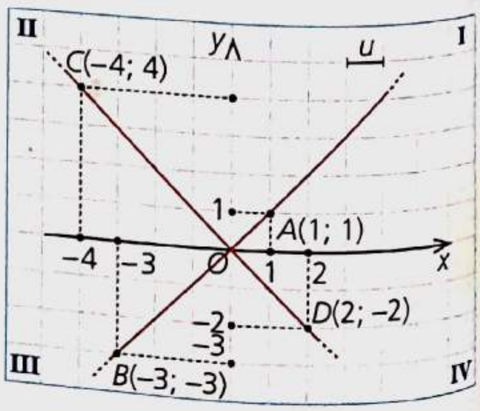
Osserva la figura qui sopra.
I punti del **I quadrante** hanno ascissa e ordinata entrambe positive.
I punti del **II quadrante** hanno ascissa negativa e ordinata positiva.
I punti del **III quadrante** hanno ascissa e ordinata entrambe negative.
I punti del **IV quadrante** hanno ascissa positiva e ordinata negativa.

quadrante	ascissa x	ordinata y	esempio
I	+	+	$A(2; 4)$
II	−	+	$B(-3; 2)$
III	−	−	$C(-4; -3)$
IV	+	−	$D(3; -2)$



Osserva ora la posizione sul piano cartesiano delle seguenti coppie di punti.
I punti $A(5; 2)$ e $B(5; -2)$ sono **simmetrici rispetto all'asse x** perché hanno le *ascisse uguali* e le *ordinate opposte*.
I punti $C(2; 3)$ e $D(-2; 3)$ sono **simmetrici rispetto all'asse y** perché hanno le *ascisse opposte* e le *ordinate uguali*.
I punti $E(3; 1)$ e $F(-3; -1)$ sono **simmetrici rispetto all'origine degli assi** perché hanno le *ascisse* e le *ordinate opposte*.

Nella figura a lato puoi osservare che i punti $A(1; 1)$, $B(-3; -3)$, $C(-4; 4)$, $D(2; -2)$ sono situati rispettivamente sulla **bisettrice** del I, III, II e IV quadrante. Nel primo caso l'ascissa e l'ordinata sono uguali e positive, nel secondo l'ascissa e l'ordinata sono uguali e negative, negli ultimi due casi l'ascissa e l'ordinata sono opposte.



PROVO

1 **Sul quadrettato qui a fianco disegna un piano cartesiano e su di esso segna i quadranti I, II, III, IV.**
Fissa un punto sul primo quadrante e rispondi.

a. Com'è l'ascissa? ☐ positiva ☐ negativa

b. Com'è l'ordinata? ☐ positiva ☐ negativa

Fissa un punto sul secondo quadrante e completa.

c. L'ascissa è il numero .... ed è ....

d. L'ordinata è il numero .... ed è ....

Fissa un punto sul terzo quadrante e completa.

e. L'ascissa è il numero .... ed è ....

f. l'ordinata è il numero .... ed è ....

Fissa un punto sul quarto quadrante e rispondi.
Quali sono le sue coordinate? Come sono l'ascissa e l'ordinata?

2 **Un punto *P* ha come coordinate i numeri –5 e 6. In quale quadrante si trova? Sai rappresentarlo?**

3 **Rappresenta su un piano cartesiano i seguenti punti, specificando il quadrante in cui si trovano.**

A(8; 3) *D*(4; –2) *G*(–3; 3)
B(–6; 4) *E*(3; –8) *H*(–4; –7)
C(–5; 7) *F*(–1; –5) *L*(9; 1)

Attenzione! Ogni punto del piano è individuato da una coppia ordinata di numeri. Ma non fare confusione: il primo di essi è sempre l'ascissa, il secondo è sempre l'ordinata.

4 **Segna su un piano cartesiano le coppie di punti:**
A(4; 2) e *B*(4; –2) • *A*(3; 5) e *B*(–3; 5) • *A*(–6; –6) e *B*(6; 6)
In ciascun caso, come sono tra loro le ascisse? E le ordinate?
Specifica la posizione di ogni coppia rispetto all'asse *x*, all'asse *y* e all'origine degli assi.

5 **Segna su un piano cartesiano una coppia di punti simmetrici rispetto all'asse *x* e una coppia rispetto all'asse *y* e scrivi le loro coordinate. Che cosa osservi?**

6 **Segna su un piano cartesiano una coppia di punti simmetrici rispetto all'origine e scrivi le loro coordinate. Che cosa hai potuto osservare?**

7 **Rappresenta su un piano cartesiano le seguenti coppie di punti.**
A(4; 5) e *B*(4; –5) • *C*(2; –6) e *D*(–2; –6) • *E*(7; 7) e *F*(–7; –7) • *R*(–4; 3) e *S*(4; 3)

8 **Verso il dibattito** Esprimi la tua opinione: vero o falso?

a. Il punto *A*(–5; –5) si trova sulla bisettrice del II quadrante. V F

b. Il punto *A*(–2; 2) si trova sulla bisettrice del III quadrante. V F

c. Il punto *A*(4; 4) si trova sulla bisettrice del I quadrante. V F

d. Il punto *A*(–3; 3) si trova sulla bisettrice del IV quadrante. V F

Per ogni caso fai il disegno.

9 **Su un piano cartesiano segna i punti *A*(–3; 3) e *B*(–6; 6) e completa.**
I punti dati sono allineati sulla .... del .... quadrante perché hanno ascissa e ordinata ....

ESERCIZI → P. 306

5.2 **IMPARO...**

Videolezione

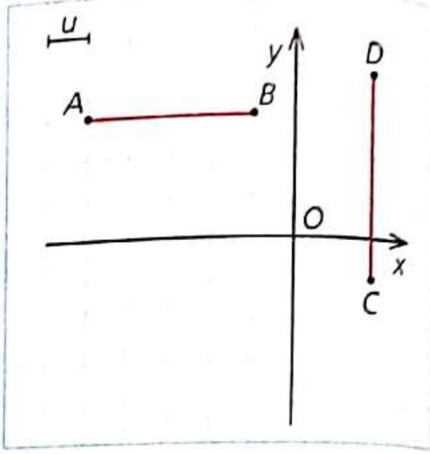
Distanza e punto medio

PENSA

UN PUNTO MOBILE SI SPOSTA SU UN PIANO CARTESIANO DA A(-5; 3) VERSO B(-1; 3). QUAL È LA DISTANZA TRA A E B?

Osserviamo che i punti dati hanno la stessa ordinata, quindi il segmento AB che li unisce è parallelo all'asse x e la distanza è 4 volte l'unità di misura u.
Utilizzando le coordinate dei punti A e B, la lunghezza del segmento AB è data dal valore assoluto della differenza tra l'ascissa di A e l'ascissa di B.

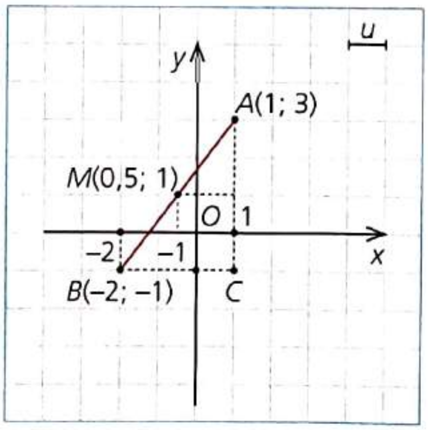
$\overline{AB} = |x_A - x_B| = |-5-(-1)| = |-5+1| = |-4| = 4\ (u)$



In modo analogo possiamo calcolare la distanza tra il punto $C(2; -1)$ e il punto $D(2; 4)$ aventi la stessa ascissa. Essa è data dal valore assoluto della differenza tra l'ordinata di C e l'ordinata di D.

$$\overline{CD} = |y_C - y_D| = |-1 - 4| = |-5| = 5\ (u)$$

Se due punti A e B non hanno la stessa ascissa né la stessa ordinata la loro distanza si calcola applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC in cui AB è l'ipotenusa, AC e BC i cateti.



Per esempio, calcoliamo la distanza tra $A(1; 3)$ e $B(-2; -1)$.
Osserviamo la figura:

- la misura del cateto $\overline{AC}$ è 4 (u);
- la misura del cateto $\overline{BC}$ è 3 (u).

Per il teorema di Pitagora si ha:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5\ (u)$$

In generale, dati due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ la formula per la determinazione della loro distanza è:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Nella formula non occorre considerare il valore assoluto delle differenze delle coordinate perché sono elevate al quadrato e quindi sono sempre positive.

Il **punto medio** M del segmento AB ha per coordinate $M(-0,5; 1)$ come puoi osservare in figura.
L'ascissa e l'ordinata di M sono date rispettivamente dalla semisomma delle ascisse e dalla semisomma delle ordinate degli estremi del segmento AB. Se $A(1; 3)$ e $B(-2; -1)$, si ha:

$$x_M = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5 \quad \text{e} \quad y_M = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

La formula generica per la determinazione delle coordinate del punto medio di un segmento è:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

PROVO

1 **Finestra sulla realtà** Dall'aeroporto $A(400; 700)$ parte un aereo diretto all'aeroporto $B(-100; -500)$. Qual è la distanza tra i due aeroporti, in linea d'aria, espressa in kilometri?

✓ ESERCIZIO GUIDATO

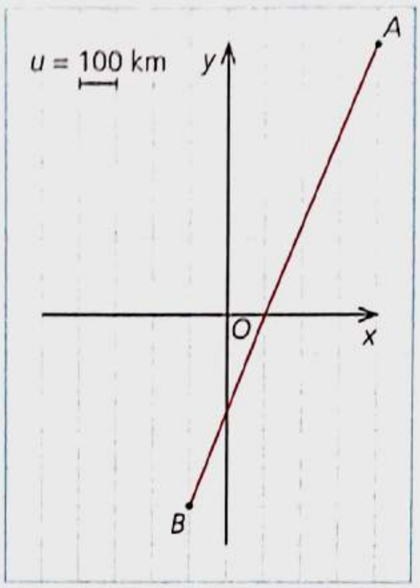
Le coordinate del punto A sono 400 e ....

Le .... del punto B sono .... e -500.

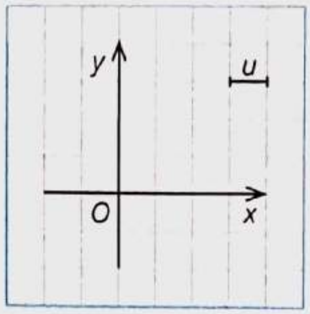
Applico la formula e in essa sostituisco i valori delle coordinate dei punti A e B:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} =$$
$$= \sqrt{[400-(-100)]^2 + [700-(\ldots\ldots)]^2} =$$
$$= \sqrt{(400+100)^2 + (700+\ldots\ldots)^2} =$$
$$= \sqrt{500^2 + \ldots\ldots^2} = \sqrt{\ldots\ldots + \ldots\ldots} = \sqrt{\ldots\ldots} =$$
$$= 1300 \text{ (km)}$$

La risposta è ....



2 **Verifica sperimentale** Utilizzando la formula della distanza tra due punti, verifica nel piano cartesiano che il triangolo avente per vertici i punti $A(-1; 1)$, $B(5; 1)$, $C(2; 5)$ è isoscele.



3 Rappresenta sul piano cartesiano le seguenti coppie di punti e calcola la loro distanza (in centimetri). Che cosa puoi osservare?

$A(7; 5)$ e $B(3; 5)$ • $C(-4; 6)$ e $D(7; 6)$ • $E(9; -4)$ ed $F(3; -4)$ [4 cm; 11 cm; 6 cm]

4 Rappresenta i seguenti punti sul piano cartesiano e calcola (in centimetri) la distanza fra di essi. Che cosa puoi osservare?

$A(2; -6)$ e $B(2; 4)$ • $C(-7; 3)$ e $D(-7; -4)$ • $E(8; 3)$ ed $F(8; -3)$ [10 cm; 7 cm; 6 cm]

5 Rappresenta su un piano cartesiano i seguenti punti e calcola la distanza (in centimetri) mediante l'applicazione della formula.

$A(9; 1)$ e $B(1; 16)$ • $C(3; 8)$ e $D(6; 4)$ • $E(14; 2)$ ed $F(2; 7)$

6 Rappresenta su un piano cartesiano i seguenti punti e calcola le distanze AB e CD, verificando che sono uguali tra loro (u = 1 cm). Calcola poi le distanze AD e BC e indica quale delle seguenti risposte è corretta.

$A(2; 3)$ $B(5; 7)$ $C(-2; 2)$ $D(-6; -1)$

A $AD = BC$ **B** $AD > BC$ **C** $AD < BC$

Prime competenze

7 Rappresenta su un piano cartesiano i seguenti segmenti, di cui sono dati gli estremi, e determina le coordinate del punto medio.

$A(9; 6)$ e $B(1; 2)$ • $S(3; 9)$ e $T(6; 5)$ • $Q(5; -3)$ ed $R(5; -11)$

ESERCIZI → P. 309

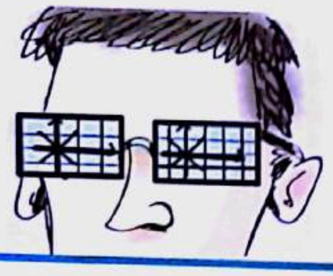
5.3 IMPARO...

Videolezione

Rette per l'origine

PENSA

COME SI TRACCIA IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE DI PROPORZIONALITÀ DIRETTA DI EQUAZIONE $Y = 2X$? CHE TIPO DI GRAFICO SI OTTIENE?

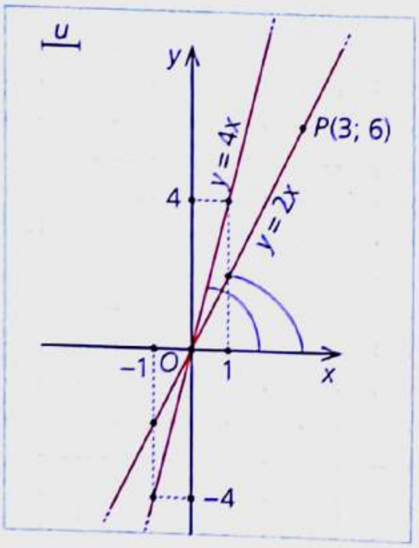


Per tracciare il grafico della funzione $2x$, si assegnano alla x valori arbitrari e si calcolano i corrispondenti valori di y.

x	y
0	0
1	2
−1	−2

	$(x; y)$
se $x = 0$, allora $y = 2 \cdot (0) = 0$	$(0; 0)$
se $x = 1$, allora $y = 2 \cdot (1) = 2$	$(1; 2)$
se $x = -1$, allora $y = 2 \cdot (-1) = -2$	$(-1; -2)$

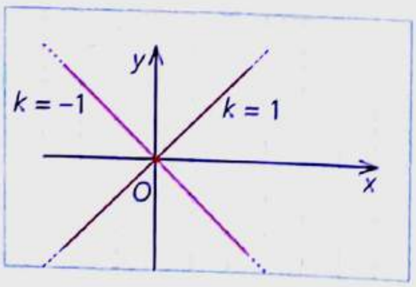
Poi si riportano le coppie ordinate sul piano cartesiano e si congiungono i punti ottenuti. Osserviamo subito che il grafico è una **retta passante per l'origine degli assi**.



Ora, se tracciamo sullo stesso piano cartesiano la retta di equazione $y = 4x$, possiamo verificare che la sua inclinazione è diversa da quella della retta di equazione $y = 2x$. Per questo motivo il coefficiente della x si chiama **coefficiente angolare** della retta.

Aumentando il coefficiente angolare di una retta aumenta anche l'ampiezza dell'angolo che essa forma con il semiasse positivo delle ascisse.

Ogni funzione del tipo $y = kx$ rappresenta l'equazione di una retta passante per l'origine degli assi. Il valore k determina l'inclinazione della retta rispetto all'asse x e viene chiamato coefficiente angolare.



È facile verificare che:

- se $k > 0$ la retta si trova nel I e nel III quadrante, come nell'esempio precedente;
- se $k < 0$ la retta si trova nel II e nel IV quadrante;
- se $k = 1$ la retta è la **bisettrice** del I e del III quadrante;
- se $k = -1$ la retta è la **bisettrice** del II e del IV quadrante.

Per stabilire se un dato punto appartiene a una retta si può procedere in due modi: graficamente o algebricamente.

Per tracciare il grafico di un'equazione del tipo $y = kx$, basta calcolare le coordinate di un solo punto diverso da zero perché per due punti passa una e una sola retta.

1. Per esempio, facendo riferimento alla figura in alto, verifichiamo **graficamente** che il punto $P(3; 6)$ **appartiene** alla retta $y = 2x$. Per fare ciò è sufficiente prolungare la retta e segnare il punto: esso giace sulla retta.
2. Verifichiamo ora **algebricamente** che il punto $P(3; 6)$ appartiene alla retta $y = 2x$ sostituendo le coordinate di P nell'equazione $y = 2x$, cioè $6 = 2 \cdot 3$, da cui $\mathbf{6 = 6}$. Poiché esse **soddisfano** l'equazione, possiamo affermare che $P(3; 6)$ appartiene alla retta $y = 2x$.

PROVO

1 **Completa le seguenti frasi.**

a. Due grandezze variabili, x e y, dipendenti l'una dall'altra, si dicono direttamente proporzionali se, diventando l'una doppia, tripla, ..., la metà, un terzo, ..., anche l'altra diventa ...., ..., ..., ... Se due grandezze sono direttamente proporzionali, il rapporto tra due valori corrispondenti è $\frac{y}{x}$ = ...

b. Nell'equazione $y = 8x$, la lettera x si chiama variabile indipendente, la lettera y si chiama ....

c. L'equazione $y = 3x$ esprime una funzione di .... Il suo grafico sul piano cartesiano è una .... passante per .... degli ....

d. Nell'equazione $y = 9x$ il numero 9 si chiama .... angolare perché determina l' .... della .... rispetto all'asse ....

2 **Traccia sul piano cartesiano il grafico della funzione $y = 5x$. Come si chiama il grafico che hai ottenuto? Qual è il coefficiente angolare?**

valore di x	valore di y	coordinate dei punti del grafico
0	$5 \cdot (0) = 0$	$O(0; 0)$
1	....	A(........; ....)
2	....	B(........; ....)
–1	....	C(........; ....)
–2	....	D(........; ....)

3 **Su diversi piani cartesiani traccia i grafici delle rette di equazioni date e per ciascuna di esse indica il coefficiente angolare e i quadranti che attraversa.**

$y = 2x$ • $y = -4x$ • $y = -6x$ • $y = 8x$ • $y = x$ • $y = -x$

Quale delle precedenti equazioni è quella che rappresenta la bisettrice del I e III quadrante? E la bisettrice del II e IV quadrante?

4 **Su uno stesso piano cartesiano disegna i grafici delle seguenti rette e segna con degli archetti l'inclinazione di ciascuna di esse rispetto all'asse x. Che cosa osservi?**

$y = 3x$ • $y = 7x$ • $y = 4x$

5 **Scrivi l'equazione di una retta passante per l'origine degli assi, avente coefficiente angolare –6, e rappresentala su un piano cartesiano.**

Prime competenze

6 **Rappresenta su un piano cartesiano la retta di equazione $y = 3x$. Stabilisci algebricamente e graficamente quali tra i seguenti punti appartengono a essa.**
$A(3; 9)$ • $B(1; 3)$ • $C(3; 6)$ • $D(-1; -3)$ • $E(-2; 6)$ • $F(-4; -12)$.

ESERCIZIO GUIDATO

$A(3; 9) \in$ alla retta $y = 3x$ perché $9 = 3 \cdot (3)$ cioè $9 = 9$.

$B(1; 3)$ .... continua sul tuo quaderno.

ESERCIZI → P. 313

5.4 IMPARO...

Videolezione

Retta generica

PENSA

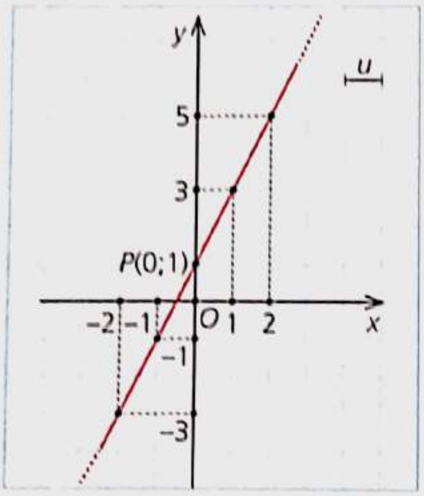
CHE TIPO DI GRAFICO SI OTTIENE PER LA FUNZIONE $y = 2x + 1$ CHE A OGNI NUMERO x FA CORRISPONDERE IL DOPPIO DELLO STESSO NUMERO AUMENTATO DI 1?

Per rispondere, prepariamo una tabella attribuendo alla x valori arbitrari e determinando i corrispondenti valori della y.

x	$y = 2x + 1$
−2	$2(-2) + 1 = \mathbf{-3}$
−1	$2(-1) + 1 = \mathbf{-1}$
0	$2(0) + 1 = \mathbf{1}$
1	$2(1) + 1 = \mathbf{3}$
2	$2(2) + 1 = \mathbf{5}$

Il lavoro preparatorio appena svolto ci consente di scrivere le coppie ordinate di valori che rileviamo dalla tabella:
$(-2; -3)$, $(-1; -1)$, $(0; 1)$, $(1; 3)$, $(2; 5)$.

Infine, tracciamo un sistema di riferimento cartesiano, segniamo i punti che corrispondono alle coppie di valori x e y e congiungiamoli. Otteniamo così il grafico dell'equazione $y = 2x + 1$.



Per tracciare il grafico di un'equazione del tipo $y = kx + q$, basta calcolare le coordinate di due soli punti perché, come già sappiamo, per due punti passa una sola retta.

Osserviamo che i punti segnati sono *tutti allineati* su una stessa retta e che questa interseca l'asse y nel punto $P(0; 1)$, di ordinata $+1$.
Dunque, tale retta non passa per l'origine degli assi.

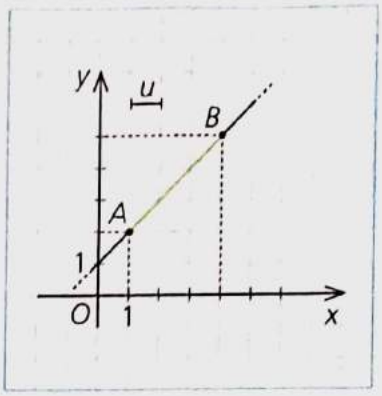
Una qualsiasi equazione del tipo $y = kx + q$ (dove k e q sono due numeri reali) ha come grafico una retta che interseca l'asse y nel punto di ordinata q. Il parametro q è detto anche termine noto.

Verifichiamo ora algebricamente se il punto $Q(-4; -7)$ appartiene alla retta data. Per fare ciò sostituiamo le coordinate di Q nell'equazione $y = 2x + 1$:

$-7 = 2(-4) + 1$ da cui: $-7 = -7$

Poiché esse **soddisfano** l'equazione, possiamo affermare che $Q(-4; -7)$ appartiene alla retta $y = 2x + 1$.

1 **Finestra sulla realtà** In figura è rappresentato il percorso che Luigi compie per recarsi da casa sua (punto A) in palestra (punto B). Immaginando che tale percorso sia una retta sul piano cartesiano, qual è la sua equazione? Riconoscila senza ricorrere ai calcoli e spiega il motivo della tua scelta.



A $y = 3x$

B $y = x + 2$

C $y = x + 1$

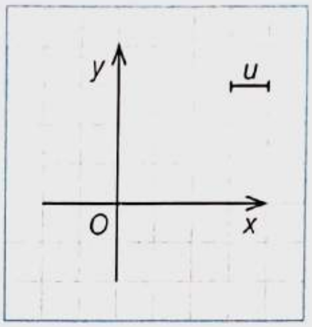
D $y = x + 5$

2 Completa.

a. Traccia su un piano cartesiano il grafico della funzione $y = x + 2$, dopo aver completato la seguente tabella.

x	$y = x + 2$
−2	....
−1	....
0	....
1	....
2	....

$(x; y)$
$A(-2; 0)$
B(.........; ....)
C(.........; ....)
D(.........; ....)
E(.........; ....)



b. L'equazione $y = 3x - 1$ ha come coefficiente angolare il numero .... e come termine noto ....

c. L'equazione $y = x + 4$ ha come grafico una .... che interseca l'asse y nel punto ....

3 Dopo aver completato la tabella, rappresenta sul piano cartesiano ciascuna delle rette date.

equazione della retta	coefficiente angolare	coordinate del punto di intersezione della retta con l'asse y	coordinate di un altro punto qualsiasi della retta
$y = 2x - 1$	2	$A(O; -1)$	$B(1; 1)$
$y = -3x + 2$	....	....	....
$y = x + 3$	....	....	....
$y = 5x - 4$	....	....	....
$y = \frac{1}{3}x - 2$	....	....	....

4 Scrivi l'equazione della retta che ha il coefficiente angolare uguale a −3 e l'ordinata del punto di intersezione con l'asse y uguale a 2 e disegnala sul piano cartesiano.

ESEMPIO Se il coefficiente angolare è 5 e l'ordinata del punto di intersezione con l'asse y è uguale a −4, l'equazione della retta è: $y = 5x - 4$.

5 Spiega algebricamente perché il punto $A(-3; -4)$ appartiene alla retta di equazione $y = x - 1$. Rappresenta poi la retta su un piano cartesiano e verifica l'appartenenza di A a essa.

Prime competenze

6 Spiega con un ragionamento algebrico perché il punto $B(-1; 2)$ non appartiene alla retta di equazione $y = 4x + 3$. Quindi rappresenta la retta su un piano cartesiano e verifica quanto hai osservato.

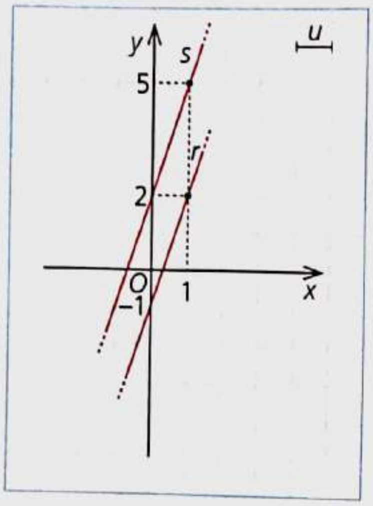
ESERCIZI → P. 316

Rette parallele

PENSA

DATE LE RETTE r ED s RISPETTIVAMENTE DI EQUAZIONI
$y = 3x - 1$
$y = 3x + 2$
CHE COSA OSSERVI?

Si vede subito che le rette r ed s hanno lo **stesso coefficiente angolare**. Poiché il coefficiente angolare di una retta determina l'inclinazione della retta rispetto all'asse x si deduce che, avendo lo stesso coefficiente angolare, le due rette sono **parallele**.



Verifichiamo il loro *parallelismo* tracciando i rispettivi grafici sullo stesso piano cartesiano dopo aver costruito una tabella di valori x e y per ciascuna delle due rette.

r: $y = 3x - 1$

x	0	1
y	–1	2

s: $y = 3x + 2$

x	0	1
y	2	5

Osserviamo, come avevamo già previsto, che le due rette sono parallele. In simboli si scrive $r \parallel s$.

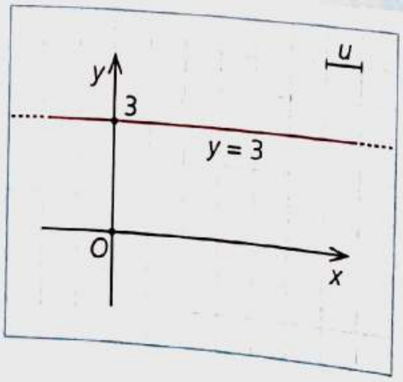
Due rette di equazioni $y = kx + q$ e $y = k'x + q'$ sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare, cioè se $k = k'$ (condizione di parallelismo).

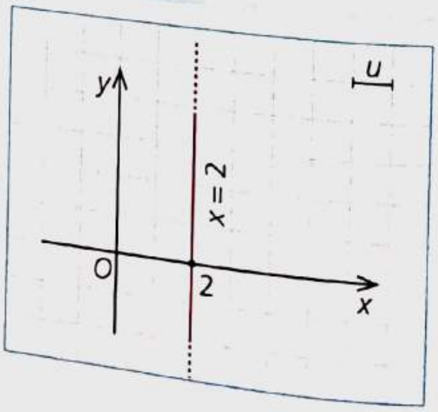
Consideriamo ora la retta di equazione $y = 3$.
Questa retta ha tutti i punti con la stessa ordinata che è 3. La sua rappresentazione sul piano cartesiano è una **retta parallela all'asse x** che interseca l'asse y nel punto di ordinata uguale a 3 (figura in basso a sinistra).

Consideriamo infine la retta di equazione $x = 2$.
Questa retta ha tutti i punti con la stessa ascissa che è 2. La sua rappresentazione sul piano cartesiano è una **retta parallela all'asse y** che interseca l'asse x nel punto di ascissa uguale a 2 (figura in basso a destra).

L'equazione di una retta parallela all'asse x è del tipo $y = k$.
L'equazione di una retta parallela all'asse y è del tipo $x = k$.
L'equazione dell'asse x è $y = 0$; l'equazione dell'asse y è $x = 0$.

Una retta di equazione $y = k$ (dove k è un numero reale) è parallela all'asse x.





Una retta di equazione $x = k$ (dove k è un numero reale) è parallela all'asse y.

PROVO

1 **Verifica sperimentale** Traccia in un unico sistema di assi cartesiani le seguenti rette e verifica che non si tratta di rette parallele.

a. $y = 2x - 1$
b. $y = 3x + 2$

2 Stabilisci se le seguenti coppie di rette sono parallele oppure se non lo sono, motivando la risposta.

a. $y = 5x - 2$ e $y = 5x + 1$ SÌ NO
b. $y = 3x + 4$ e $y = -3x + 5$ SÌ NO
c. $y = 4x - 1$ e $y = 3x - 1$ SÌ NO
d. $y = 2x - 3$ e $y = 2x + 2$ SÌ NO

3 Traccia in un unico sistema di assi cartesiani le rette t e q rispettivamente di equazioni $y = 2x - 3$ e $y = 2x$ e verifica che si tratta di rette parallele.

✔ ESERCIZIO GUIDATO

Costruisci una tabella di valori per ciascuna retta.

t:

x	$y = 2x - 3$
0	$2(0) - 3 =$ ....
....	....
....	....

q:

x	$y = 2x$
....	....
....	....
....	....

4 **Usa la creatività** Completa la tabella, scrivendo per ciascuna retta il coefficiente angolare e l'equazione di una retta parallela a essa avente il termine noto a tuo piacere.

equazione della retta	coefficiente angolare della retta	retta parallela a quella data
$y = 4x + 3$	$+4$	$y = 4x - 5$
$y = 3x - 1$	....	....
$y = -2x + 4$	....	....
$y = 5x + 1$	....	....
$y = -x + 3$	....	....
$y = 6x - 5$	....	....

È conveniente scegliere numeri piccoli per il termine noto, al fine di poter rappresentare ciascuna coppia di rette su un piano cartesiano.

5 Completa.

a. La retta di equazione $y = 4$ è .... all'asse ....
b. La retta di equazione $x = -3$ è .... all'asse ....
c. L'equazione dell'asse x è ....
d. L'equazione dell'asse y è ....

6 Tra le seguenti equazioni di rette sottolinea con un colore quelle che si riferiscono a rette parallele all'asse x e rappresentale sul piano cartesiano.

$y = 3$ • $x = 5$ • $y = -4$ • $y = 6x$ • $y = \frac{1}{2}x$ • $x = y^2$ • $y = -6$ • $y = x$

7 Tra le seguenti equazioni di rette sottolinea con un colore quelle che sono parallele all'asse y.

$x = 6$ • $y = 3$ • $x = -2$ • $x = 3$ • $y = 7$ • $y = -x$ • $x = -4$ • $x = 5y$

Prime competenze

8 In un sistema di riferimento cartesiano traccia le rette di equazioni $y = -x + 1$ e $y = -x + 3$. Come sono le due rette? Qual è il coefficiente angolare di ciascuna di esse? Scrivi poi l'equazione di una terza retta parallela a quelle date e che intersechi l'asse y nel punto di ordinata -2. Rappresentala sullo stesso piano cartesiano.

ESERCIZI → P. 318

Rette perpendicolari

Videolezione

PENSA

DATE LE RETTE r ED s DI EQUAZIONI RISPETTIVAMENTE

$y = 3x - 1$

$y = -\frac{1}{3}x + 2$

CHE COSA OSSERVI?

Si vede subito che i coefficienti angolari delle due rette sono uno l'**opposto** e il **reciproco** dell'altro.

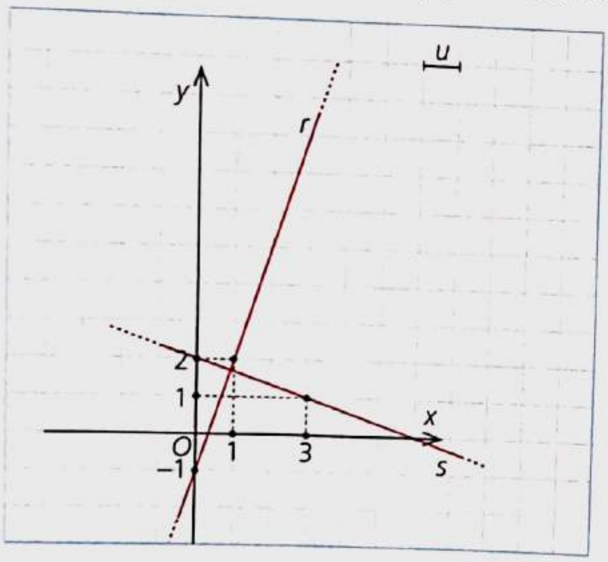
r:

x	$y = 3x - 1$
0	$y = 3(0) - 1 = -1$
1	$y = 3(1) - 1 = 2$

s:

x	$y = -\frac{1}{3}x + 2$
0	$y = -\frac{1}{3}(0) + 2 = 2$
3	$y = -\frac{1}{3}(3) + 2 = 1$

Come di consueto, per studiare le caratteristiche di r e s abbiamo costruito una tabella di valori x e y per ciascuna delle due rette; rappresentiamole ora su uno stesso piano cartesiano.



Il coefficiente angolare della retta r è 3, mentre il coefficiente angolare della retta s è $-\frac{1}{3}$. Quindi, $r \perp s$.

Con un goniometro misuriamo gli angoli che le rette r ed s formano. Notiamo che ciascuno di essi è di 90°, pertanto possiamo affermare che le rette date sono **perpendicolari**. In simboli si scrive $r \perp s$.

Poiché i coefficienti angolari delle due rette, che sono 3 e $-\frac{1}{3}$, hanno segni opposti e sono uno l'inverso dell'altro, si deduce che il loro prodotto è uguale a -1, cioè:

$3\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$ e, in generale, $kk' = -1$.

Due rette di equazioni $y = kx + q$ e $y = k'x + q'$ sono perpendicolari se i loro coefficienti angolari sono opposti e inversi, cioè se $kk' = -1$ (condizione di perpendicolarità).

PROVO

1 **Verifica sperimentale** Traccia in un unico sistema di assi cartesiani le rette di equazioni $y = 2x + 3$ e $y = -\frac{1}{2}x + 1$ e verifica che sono perpendicolari.

2 Completa.

a. Le rette $y = 5x - 2$ e $y = -\frac{1}{5}x + 1$ hanno i coefficienti angolari 5 e .... di segno .... e uno .... dell'altro.

b. Due rette con i coefficienti angolari uno inverso dell' .... e di segno .... sono ....

c. Il prodotto dei coefficienti angolari di due rette perpendicolari è uguale a ....

d. Una retta *r*, affinché risulti perpendicolare alla retta *s* di equazione $y = -6x + 1$, deve avere come coefficiente angolare il numero ....

3 Stabilisci quali tra le seguenti coppie di rette sono tra loro perpendicolari e quali non lo sono. In caso di risposta affermativa rappresenta ciascuna coppia su uno stesso piano cartesiano.

a. $y = 4x - 1$ e $y = -\frac{1}{4}x + 3$ — SÌ NO

b. $y = -\frac{1}{3}x + 5$ e $y = 2x - 4$ — SÌ NO

c. $y = 2x + 1$ e $y = -\frac{1}{2}x + 2$ — SÌ NO

d. $y = -\frac{1}{3}x + 1$ e $y = 3x$ — SÌ NO

4 Date le rette di equazioni $y = 2x - 4$ e $y = -\frac{1}{2}x$, rappresentale su un piano cartesiano.

5 Scrivi l'equazione di una retta perpendicolare alla retta $y = 4x - 1$. Rappresenta le due rette sul piano cartesiano e verificane la perpendicolarità.

Prime competenze

6 Completa la tabella, scrivendo per ciascuna retta *r* il suo coefficiente angolare, il coefficiente angolare di una retta *s* perpendicolare a *r* e infine l'equazione di una retta *s* avente il termine noto a tuo piacere.

equazione della retta *r*	coefficiente angolare della retta *r*	coefficiente angolare di una retta $s \perp r$	equazione della retta *s*
$y = 3x + 2$	3	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}x + 1$
$y = 5x - 1$	....	....	....
$y = -4x + 2$	....	....	....
$y = 6x - 3$	....	....	....
$y = 2x + 3$	....	....	....
$y = -\frac{1}{2}x + 4$	....	....	....

È conveniente scegliere numeri piccoli per il termine noto, al fine di poter rappresentare ciascuna coppia di rette su un piano cartesiano.

ESERCIZI → P. 320

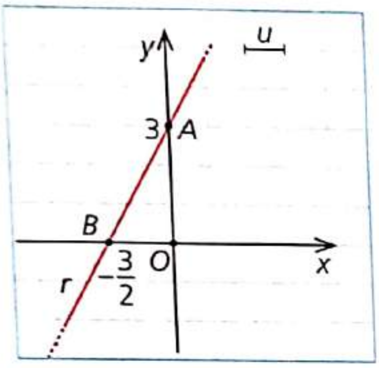
Videolezione

Intersezione di una retta con gli assi cartesiani

PENSA

DATA LA RETTA r DI EQUAZIONE $Y = 2X + 3$, COME SI DETERMINANO ALGEBRICAMENTE E GRAFICAMENTE LE COORDINATE DEI PUNTI D'INTERSEZIONE DELLA RETTA CON GLI ASSI CARTESIANI?

Comincia da questa considerazione: il punto A in cui la retta r incontra l'asse y avrà ascissa uguale a 0, come tutti i punti di questo asse.



A partire da quanto detto sopra, ponendo nell'equazione data $x = 0$, si ricava il valore di y che è 3.
La retta r incontra l'asse y nel punto $A(0; 3)$.
Il punto B in cui la retta r incontra invece l'asse x avrà ordinata uguale a 0. Quindi, ponendo $y = 0$, si ha $0 = 2x + 3$: si ottiene dunque il valore di x che è $-\frac{3}{2}$. La retta r incontra l'asse x nel punto $B\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.

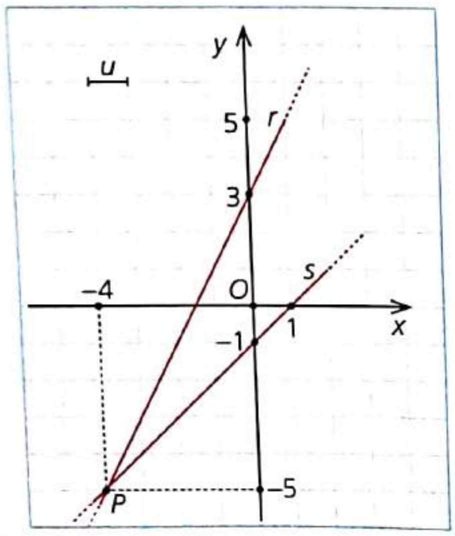
Intersezione di due rette

Date le rette r ed s rispettivamente di equazioni:

$y = 2x + 3$ e $y = x - 1$

come si determinano le coordinate del punto P, **intersezione delle due rette**?

Poiché nel punto P le due equazioni devono essere entrambe soddisfatte per uno stesso valore di x e uno stesso valore di y, le uguaglianze scritte sopra, avendo uguale il primo membro, hanno uguale anche il secondo membro. Quindi, possiamo scrivere:



$2x + 3 = x - 1$ da cui: $2x - x = -1 - 3$

$\boldsymbol{x = -4}$ è l'ascissa del punto di intersezione delle due rette.

Per calcolare l'ordinata, basta sostituire in una delle equazioni date il valore $x = -4$, ossia: $\boldsymbol{y} = 2x + 3 = 2(-4) + 3 = -8 + 3 = \boldsymbol{-5}$.
In definitiva le coordinate del punto P, intersezione delle rette r ed s, sono -4 e -5; quindi $P(-4; -5)$.

Per verificare algebricamente che $P(-4; -5)$ è proprio il punto di intersezione delle rette r ed s, sostituiamo in entrambe le equazioni il valore -4 al posto di x.

$y = 2x + 3 = 2(-4) + 3 = -5$

$y = x - 1 = -4 - 1 = -5$

Poiché il valore di y è sempre -5, il punto $P(-4; -5)$ soddisfa entrambe le equazioni e, quindi, **appartiene a entrambe le rette** ed è proprio il loro **punto di intersezione**.

PROVO

1 Verifica sperimentale Data la retta di equazione $y = -2y + 8$, determina algebricamente le coordinate dei punti di intersezione con gli assi x e y. Rappresenta poi la retta sul piano cartesiano e verifica che le coordinate trovate sono esatte.

2 Completa.

a. Le coordinate dei punti di intersezione della retta $y = 2x - 1$ con gli assi si ottengono ponendo nell'equazione data, prima $x =$ .... e successivamente $y =$ ....

b. Le coordinate del punto P in cui la retta $y = 3x + 6$ incontra l'asse y sono: ....

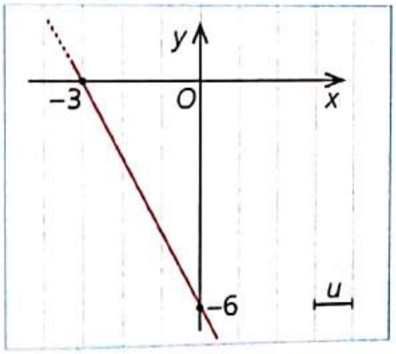
c. Le coordinate del punto Q in cui la retta $y = 4x - 12$ incontra l'asse x sono: ....

d. Le coordinate dei punti d'intersezione della retta $y = x + 5$ con gli assi sono: A(..................) e B(..................).

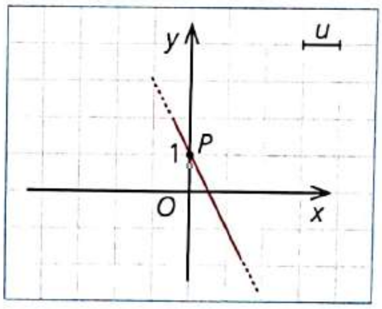
3 Completa la tabella.

equazione della retta	coordinate del punto A d'intersezione con l'asse y	coordinate del punto B d'intersezione con l'asse x
$y = 2x + 4$	....	....
$y = -3x + 2$	....	....
$y = 5 - 2x$	....	....

4 Dal grafico rileva le coordinate dei punti di intersezione della retta $y = -2x - 6$ con gli assi x e y. Verifica algebricamente che tali punti appartengono alla retta data.



5 Determina le coordinate del punto P, intersezione della retta $y = -2x + 1$ con l'asse y, e verifica che il seguente grafico si riferisce alla situazione data.

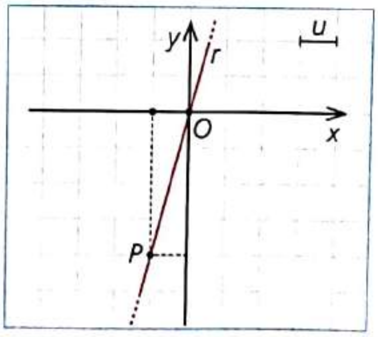


6 Completa.

Il punto $P(-1; -1)$ appartiene a entrambe le rette di equazioni $y = x$ e $y = -x - 2$, perché .... Quindi, P è il punto d'.............................. delle rette date.

Prime competenze

7 Determina algebricamente le coordinate del punto P, intersezione delle rette r ed s rispettivamente di equazioni $y = 4x$ e $y = 2x - 2$. Completa il disegno e verifica graficamente che il punto P appartiene alle due rette.



5.8 IMPARO...

Videolezione

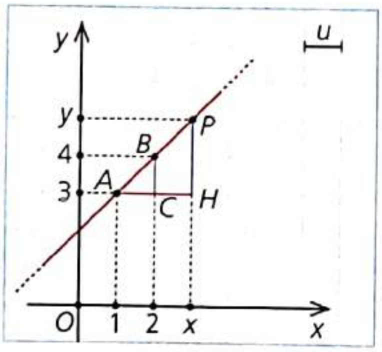
Equazione della retta per due punti

PENSA

COME SI SCRIVE L'EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER A(1; 3) E B(2; 4)?

Potrai rispondere facilmente sfruttando concetti che già conosci dallo studio della geometria: i criteri di similitudine dei triangoli.

Rappresentiamo sul piano cartesiano i punti dati, $A(1; 3)$ e $B(2; 4)$, e tracciamo la retta r passante per essi.



Vogliamo trovare l'equazione della retta r che passa per i punti assegnati. A tale scopo fissiamo su di essa un punto $P(x; y)$ e osserviamo i triangoli rettangoli AHP e ACB: essi sono simili; pertanto i rapporti di due lati corrispondenti sono uguali: $\frac{PH}{BC} = \frac{AH}{AC}$.

Sostituendo nella precedente uguaglianza le misure corrispondenti:

$PH = y - (+3) = y - 3$ $\qquad BC = 4 - (+3) = 4 - 3$

$AH = x - (+1) = x - 1$ $\qquad AC = 2 - (+1) = 2 - 1$

si ha: $\frac{y-3}{4-3} = \frac{x-1}{2-1}$

Se eseguiamo i calcoli abbiamo:

$\frac{y-3}{1} = \frac{x-1}{1}$ da cui $y - 3 = x - 1$ e quindi $\mathbf{y = x + 2}$

che è la **forma esplicita** dell'equazione della retta passante per i punti $A(1; 3)$ e $B(2; 4)$.

Per *verificare* che l'equazione trovata è proprio quella della retta che passa per i punti $A(1; 3)$ e $B(2; 4)$, sostituiamo in $y = x + 2$ le coordinate dei punti:

$A(1; 3)$ $\quad y = x + 2;\ 3 = 1 + 2;\ \mathbf{3 = 3}$

$B(2; 4)$ $\quad y = x + 2;\ 4 = 2 + 2;\ \mathbf{4 = 4}$

Poiché le coordinate dei punti $A(1; 3)$ e $B(2; 4)$ *soddisfano* l'equazione della retta $y = x + 2$, questa passa per i punti assegnati.

In generale, l'equazione della retta passante per due punti $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ è:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Il rapporto del primo membro ha per numeratore la differenza tra l'ordinata di un punto qualsiasi $P(x; y)$ del piano e l'ordinata del punto A e per denominatore la differenza tra le ordinate dei punti B e A.
Il rapporto del secondo membro ha per numeratore la differenza tra l'ascissa di un punto qualsiasi P e l'ascissa del punto A e per denominatore la differenza tra le ascisse dei punti B e A.

PROVO

1 Verifica sperimentale Verifica che le seguenti rette di equazioni assegnate passano per i punti dati.

✔ ESERCIZIO SVOLTO

La retta $y = 3x - 2$ passa per i punti $A(1; 1)$ e $B(2; 4)$ perché sostituendo nell'equazione data a x e y le coordinate dei punti A e B si ha:

$1 = 3 \cdot 1 - 2 \qquad 1 = 1$

$4 = 3 \cdot 2 - 2 \qquad 4 = 6 - 2 \qquad 4 = 4$

a. $y = 4x + 3$ passa per i punti $A(-1; -1)$ e $B(0; 3)$

b. $y = -x + 2$ passa per i punti $A(3; -1)$ e $B(4; -2)$

c. $y = -2x + 1$ passa per i punti $A(2; -3)$ e $B(1; -1)$

d. $y = 3x + 2$ passa per i punti $A(0; 2)$ e $B(-2; -4)$

e. $y = -\frac{1}{2}x - 1$ passa per i punti $A(2; -2)$ e $B(4; -3)$

f. $y = \frac{3}{2}x + 1$ passa per i punti $A\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ e $B\left(1; \frac{5}{2}\right)$

2 Completa.

a. L'equazione della retta che passa per i punti $A(2; 5)$ e $B(1; 4)$ si ricava dall'uguaglianza dei rapporti

$$\frac{y-5}{4-\ldots} = \frac{x-\ldots}{1-\ldots}$$

b. L'equazione della retta passante per due punti qualsiasi del piano $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$ è ....

3 Scrivi l'equazione della retta passante per i punti indicati.

✔ ESERCIZIO GUIDATO

$A(-2; 4)$ e $B(3; -6)$ $\rightarrow$ $\frac{y-4}{-6-4} = \frac{x-(-2)}{3-(-2)}$, da cui: $y =$ ....

a. $A(1; 4)$ e $B(2; 5)$

b. $A(3; -3)$ e $B(2; -4)$

c. $A(-1; 2)$ e $B(3; 4)$

d. $A(2; 6)$ e $B(1; 5)$

e. $A(1; -3)$ e $B(4; -5)$

f. $A(0; 7)$ e $B(-3; -4)$

Prime competenze

4 Dopo aver fatto gli opportuni calcoli, collega con le frecce ogni retta con i punti per i quali passa.

- $y = 3x + 2$
- $y = 2x - 4$
- $y = \frac{2}{3}x - 1$
- $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$
- $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{6}$

- $A(6; 3)$ e $B(0; -1)$
- $A\left(3; \frac{1}{6}\right)$ e $B\left(6; \frac{7}{6}\right)$
- $A(2; 0)$ e $B\left(4; -\frac{1}{2}\right)$
- $A(1; 5)$ e $B(-1; -1)$
- $A(1; -2)$ e $B(0; -4)$

ESERCIZI → P. 327

L'iperbole

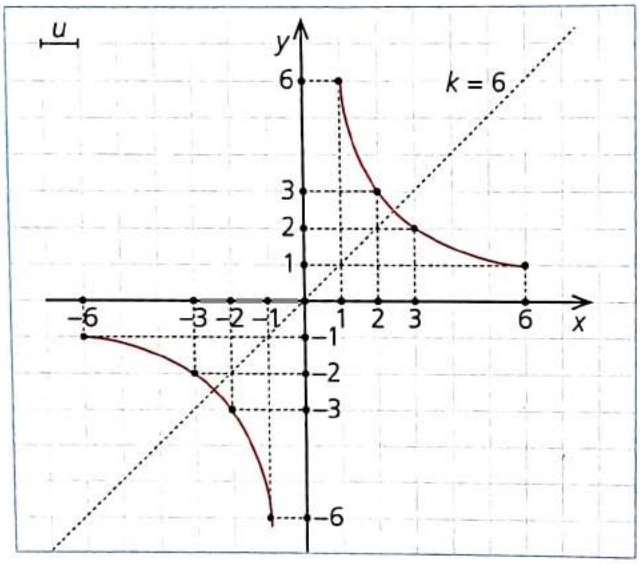
PENSA

CHE TIPO DI GRAFICO SI OTTIENE PER LA FUNZIONE DI PROPORZIONALITÀ INVERSA DI EQUAZIONE $y = \frac{6}{x}$?

Per rispondere alla domanda costruiamo una tabella assegnando alla x alcuni valori, escluso lo zero perché per quel valore l'equazione data perderebbe di significato, e calcolando i valori corrispondenti di y.

x	1	2	3	6	−1	−2	−3	−6
y	6	3	2	1	−6	−3	−2	−1

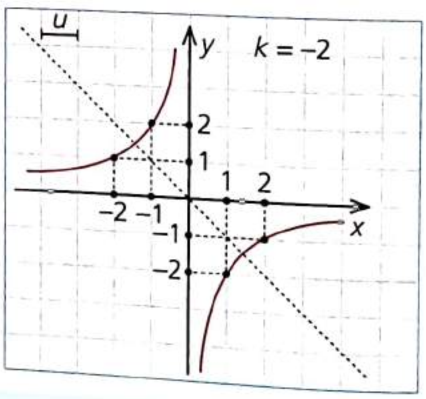
Segniamo sul piano cartesiano i punti corrispondenti alle coppie ordinate e congiungiamoli: otteniamo una curva che si chiama **iperbole equilatera**, formata da due parti che si dicono **rami dell'iperbole**.



Osserviamo l'andamento del grafico.

- L'iperbole è **simmetrica** rispetto all'origine degli assi.
- L'iperbole ha come **assi di simmetria** le bisettrici dei quadranti cui appartiene.
- I due rami dell'iperbole si trovano nel I e III quadrante perché $k > 0$.
- I due rami dell'iperbole si avvicinano sempre più agli assi x e y senza però mai toccarli; per questo motivo gli assi cartesiani sono chiamati **asintoti** dell'iperbole.

Ora, se tracciamo il grafico della funzione $y = -\frac{2}{x}$ nella quale $k < 0$, ci accorgiamo che l'iperbole giace nel II e IV quadrante.



Con $k = 6$, l'iperbole giace nel I e III quadrante.
Con $k = -2$ l'iperbole giace nel II e IV quadrante.

Ogni equazione del tipo $y = \frac{k}{x}$ è l'equazione di una curva che si chiama **iperbole equilatera**.
Se $k > 0$ l'iperbole giace nel I e III quadrante.
Se $k < 0$ l'iperbole giace nel II e IV quadrante.

PROVO

1 Completa le seguenti frasi.

a. Due grandezze variabili x e y, dipendenti l'una dall'altra, si dicono inversamente proporzionali se, diventando l'una doppia, tripla, ... , la metà, la terza parte, ... , l'altra diventa la metà, ... , ... , ... , ... , ... Se due grandezze sono inversamente proporzionali, il .... di due valori .... è .... $xy =$ ....

b. L'equazione $y = \frac{5}{x}$ esprime una funzione di .... Il numero 5 si chiama .... di proporzionalità ....

c. Il grafico di un'equazione del tipo $y = \frac{k}{x}$ è una curva che si chiama .... ed è composta da due parti che si chiamano .... dell' ....

d. La curva dell'equazione $y = \frac{4}{x}$ si trova nel .... e nel .... quadrante perché ....

e. La curva dell'equazione $y = -\frac{3}{x}$ si trova nel .... e nel .... quadrante perché ....

2 Completa la tabella, calcolando i valori che assume y al variare dei valori indicati di x.

equazione	per $x = 1$	per $x = 2$	per $x = -1$	per $x = -4$
$y = \frac{6}{x}$	$y=\frac{6}{1}=6$	$y=\frac{6}{2}=3$	$y=\frac{6}{-1}=-6$	$y=\frac{\cancel{6}^3}{-\cancel{4}_2}=-\frac{3}{2}$
$y = -\frac{4}{x}$	....	....	....	....
$y = \frac{8}{x}$	....	....	....	....
$y = \frac{12}{x}$	....	....	....	....
$y = -\frac{6}{x}$	....	....	....	....
$y = \frac{16}{x}$	....	....	....	....

3 **Verso il dibattito** In altrettanti sistemi di riferimento cartesiano disegna i grafici delle seguenti equazioni, dopo aver costruito per ciascuna di esse una tabella di valori x e y. Come si chiamano i grafici che hai ottenuto? In quali quadranti si trovano? Perché? Discutine con i compagni.

$y = \frac{12}{x}$ • $y = -\frac{10}{x}$ • $y = -\frac{4}{x}$ • $y = \frac{16}{x}$ • $y = \frac{18}{x}$

4 Data l'equazione dell'iperbole equilatera $y = \frac{15}{x}$, stabilisci algebricamente e graficamente se appartengono a essa i punti:

$A(3; 5)$ • $B(1; 15)$ • $C(3; 4)$ • $D(-5; -10)$ • $E(-5; -3)$

Prime competenze

5 In diversi sistemi di riferimento cartesiano traccia i grafici delle seguenti equazioni e per ciascuna di esse indica il coefficiente di proporzionalità inversa e i quadranti in cui si trovano.

$y = \frac{24}{x}$ • $y = -\frac{20}{x}$ • $y = -\frac{12}{x}$ • $y = \frac{8}{x}$ • $y = -\frac{6}{x}$

ESERCIZI → P. 328

5.10 **IMPARO...** Videolezione

La parabola

PENSA

LA RELAZIONE CHE LEGA L'AREA DI UN QUADRATO ALLA MISURA DEL LATO È DEL TIPO $y = x^2$, DOVE I VALORI DELLA x SONO SOLTANTO NUMERI POSITIVI PERCHÉ SI RIFERISCONO ALLA MISURA DEL LATO DI UN QUADRATO. CHE TIPO DI GRAFICO SI OTTIENE PER QUESTA FUNZIONE?

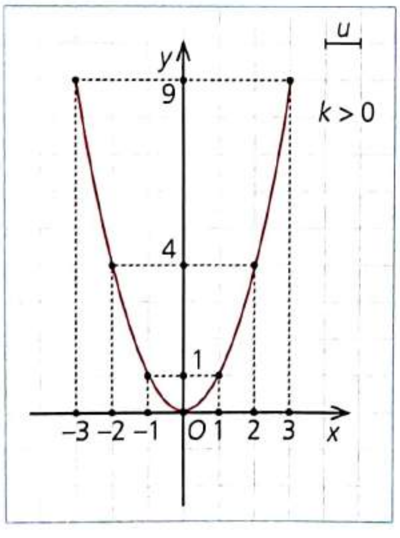
Per scoprirlo dobbiamo per prima cosa rappresentare sul piano cartesiano l'equazione $y = x^2$, che esprime la funzione di proporzionalità quadratica.

Per conseguire il nostro obiettivo, costruiamo una tabella per la x e la y e segniamo sul piano cartesiano i punti corrispondenti alle coppie ordinate di valori.

x	0	1	2	3	–1	–2	–3
y	0	1	4	9	1	4	9

Congiungendo tali punti otteniamo una curva che si chiama **parabola**.

Ogni equazione del tipo $y = kx^2$ è l'equazione di una curva che si chiama parabola.

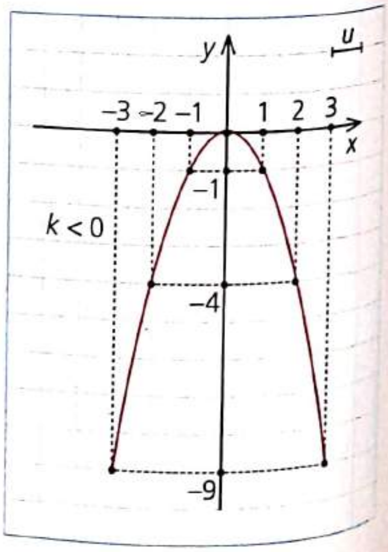


Il coefficiente k, che nel nostro esempio è 1, si chiama **coefficiente di proporzionalità quadratica**.

Osserviamo l'andamento del grafico a fianco.

- La parabola è simmetrica rispetto all'asse y che è detto **asse della parabola**.
- L'origine degli assi cartesiani è il **vertice della parabola**.
- La parabola presenta la **concavità rivolta verso l'alto** perché $k > 0$.

Se tracciamo il grafico della funzione $y = -x^2$, nella quale $k < 0$, notiamo che la parabola ha la concavità rivolta verso il basso.



Se $k > 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto.
Se $k < 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso il basso.

PROVO

1 **Verifica sperimentale** Riconosci in quali quadranti si trova il grafico di ciascuna delle seguenti parabole. Poi disegnale sul piano cartesiano, verificando l'esattezza delle tue risposte.

$y = x^2$ • $y = -3x^2$ • $y = \frac{1}{2}x^2$ • $y = -4x^2$

2 Completa.

a. Un'equazione del tipo $y = kx^2$ esprime la funzione di proporzionalità .... e il grafico che la rappresenta sul piano cartesiano si chiama ....

b. Nell'equazione $y = 6x^2$ il coefficiente k è il numero ....

c. Nell'equazione $y = -x^2$ il coefficiente k è il numero ....

d. La parabola di equazione $y = 2x^2$ presenta la concavità rivolta verso .... perché $k >$ ....

e. Sul piano cartesiano l'equazione $y = -5x^2$ è rappresentata da una .... che si trova nel .... e nel .... quadrante perché $k <$ ....

3 **Verso il dibattito** Sai spiegare perché una qualsiasi equazione del tipo $y = kx^2$ si dice equazione quadratica?

4 Qual è l'asse di simmetria della parabola?

5 È vero o falso che nella parabola di equazione $y = -4x^2$ il coefficiente di proporzionalità quadratica è 4?

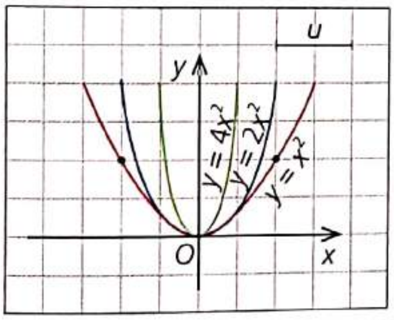
6 Disegna su uno stesso piano cartesiano le parabole di equazioni $y = 2x^2$ e $y = 3x^2$ e rispondi alle domande.

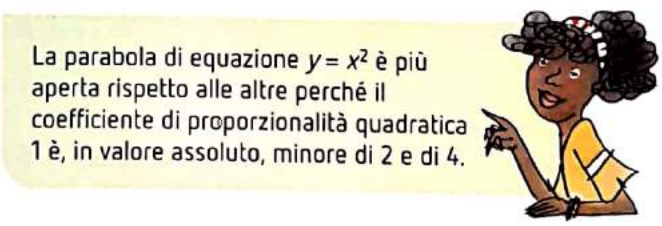
a. Quale delle due parabole presenta un'apertura maggiore rispetto all'asse y? ....

b. Aumentando il valore assoluto di k come diventa la parabola? ....

✔ ESERCIZIO SVOLTO

Osserva il disegno per cogliere la diversa apertura rispetto all'asse di simmetria delle parabole di equazioni $y = x^2$, $y = 2x^2$ e $y = 4x^2$.





7 Disegna su uno stesso piano cartesiano le parabole di equazioni $y = -6x^2$ e $y = -\frac{1}{2}x^2$ e rispondi alle domande.

a. Quale delle due parabole presenta un'apertura maggiore rispetto all'asse y? ....

b. Diminuendo il valore assoluto di k come diventa la parabola? ....

8 Rappresenta su un piano cartesiano l'equazione della parabola $y = 2x^2$. Stabilisci algebricamente se i seguenti punti appartengono a essa.

$A(2; 8)$ SÌ NO	$C(1; 2)$ SÌ NO	$E(4; 16)$ SÌ NO
$B(-3; 18)$ SÌ NO	$D(-5; -50)$ SÌ NO	$F\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ SÌ NO

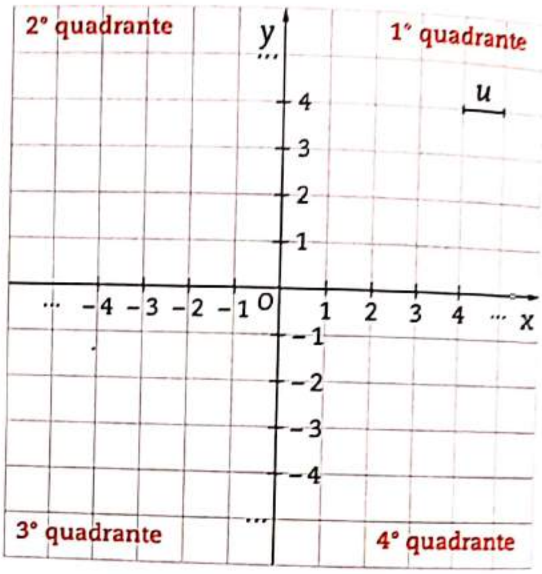
ESERCIZI → P. 331

Il piano cartesiano ortogonale

Parlando di grandezze direttamente e inversamente proporzionali, abbiamo visto come il **diagramma cartesiano** di una funzione si ottiene congiungendo tutti i punti del piano cartesiano che hanno per ascissa i valori numerici della variabile indipendente x e per ordinata i corrispondenti valori della variabile dipendente y.
I valori della x, e di conseguenza della y, possono appartenere a uno qualsiasi degli insiemi numerici che conosciamo: se consideriamo l'insieme **Q**, possono avere quindi come valore anche numeri relativi.

Il piano cartesiano ortogonale che conosciamo va quindi ampliato al fine di poter rappresentare in esso i numeri relativi. Osserva.

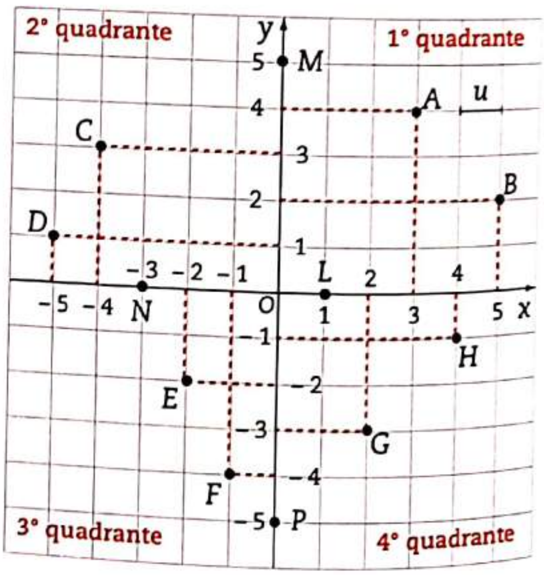
- Tracciamo due rette perpendicolari, **x** o **asse delle ascisse** (la retta orizzontale) e **y** o **asse delle ordinate** (la retta verticale), e sia O il loro punto di intersezione.
- Sull'asse x avremo da O, **origine** degli assi, verso destra il **semiasse positivo** e verso sinistra **il semiasse negativo delle ascisse**. Sull'asse y avremo da O verso l'alto il **semiasse positivo** e verso il basso il **semiasse negativo delle ordinate**.



- Stabiliamo un'unità di misura uguale per entrambi gli assi e otteniamo un **sistema di riferimento cartesiano ortogonale** che determina un piano cartesiano ortogonale suddiviso in **1°**, **2°**, **3°** e **4° quadrante**.

In questo piano cartesiano ortogonale (quando non specificato si parla sempre di piano cartesiano ortogonale) associamo a ogni punto una coppia ordinata di numeri relativi, dette **coordinate** del punto; nell'ordine il primo è l'**ascissa** e il secondo è l'**ordinata**, e rappresentiamo i seguenti punti:

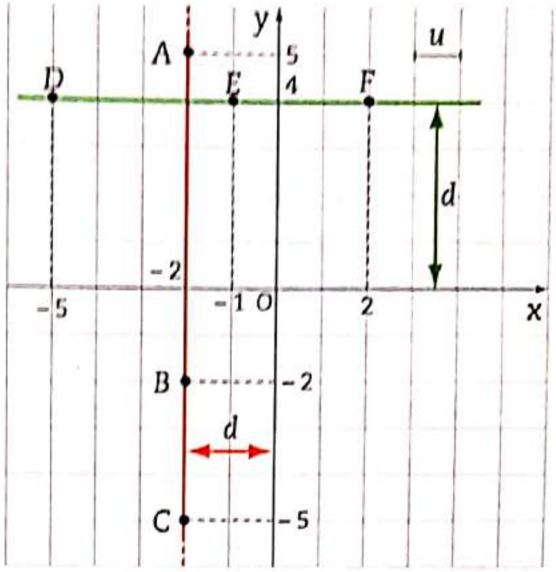
$A(+3; +4)$, $B(+5; +2)$, $C(-4; +3)$, $D(-5; +1)$,
$E(-2; -2)$, $F(-1; -4)$, $G(+2; -3)$, $H(+4; -1)$,
$L(+1; 0)$, $N(-3; 0)$, $M(0, +5)$, $P(0; -5)$



Osservando questi punti, possiamo dire che:
- i punti che si trovano nel 1° quadrante, A e B, hanno ascissa e ordinata positive;
- i punti che si trovano nel 2° quadrante, C e D, hanno ascissa negativa e ordinata positiva;
- i punti che si trovano nel 3° quadrante, E ed F, hanno ascissa e ordinata negative;
- i punti che si trovano nel 4° quadrante, G ed H, hanno ascissa positiva e ordinata negativa;
- i punti appartenenti all'asse x hanno ordinata uguale a zero;
- i punti appartenenti all'asse y hanno ascissa uguale a zero;
- il punto O ha entrambe le coordinate uguali a zero: $O(0; 0)$.

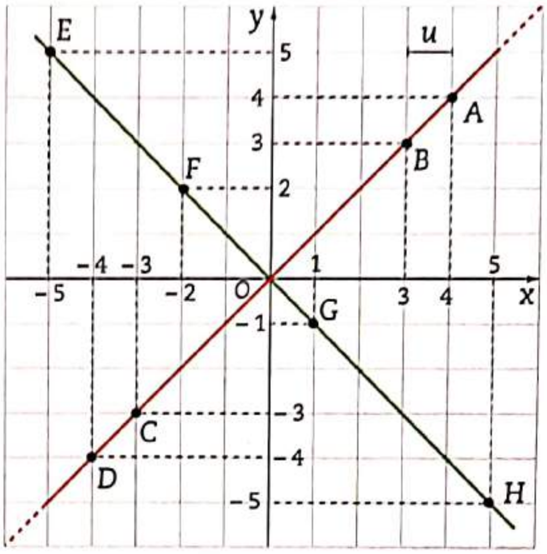
Osservando le figure a fianco, possiamo inoltre affermare che:

- punti aventi uguale ascissa appartengono a una retta parallela all'asse y; l'ascissa è, in valore assoluto, la distanza **d** della retta dall'asse y, per esempio i punti A(− 2; 5), B(− 2; − 2) e C(− 2; − 5) appartengono tutti alla retta r, che dista 2*u* dall'asse y;



- punti aventi uguale ordinata appartengono a una retta parallela all'asse x; l'ordinata è, in valore assoluto, la distanza **d** della retta dall'asse x, per esempio i punti D(− 5; 4), E(− 1; 4) ed F(2; 4) appartengono tutti alla retta s, che dista 4*u* dall'asse x;

- punti aventi ascissa e ordinata entrambe positive e fra loro uguali appartengono alla bisettrice del 1° quadrante, per esempio i punti A(+ 4; + 4) e B(+ 3; + 3);
- punti aventi ascissa e ordinata entrambe negative e fra loro uguali appartengono alla bisettrice del 3° quadrante, per esempio i punti C(− 3; − 3) e D(− 4; − 4);
- punti aventi ascissa e ordinata opposte appartengono alla bisettrice del 2° quadrante se è negativa l'ascissa e positiva l'ordinata, alla bisettrice del 4° quadrante se è positiva l'ascissa e negativa l'ordinata: per esempio i punti E(− 5; + 5) e F(− 2; + 2) appartengono alla bisettrice del 2° quadrante, G(+ 1; − 1) e H(+ 5; − 5) a quella del 4° quadrante.

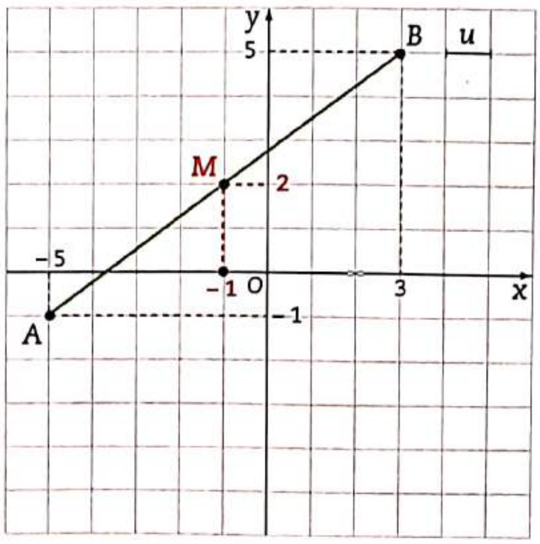


Estendiamo adesso a tutto il piano cartesiano il calcolo delle coordinate del punto medio di un segmento e della distanza fra due punti.

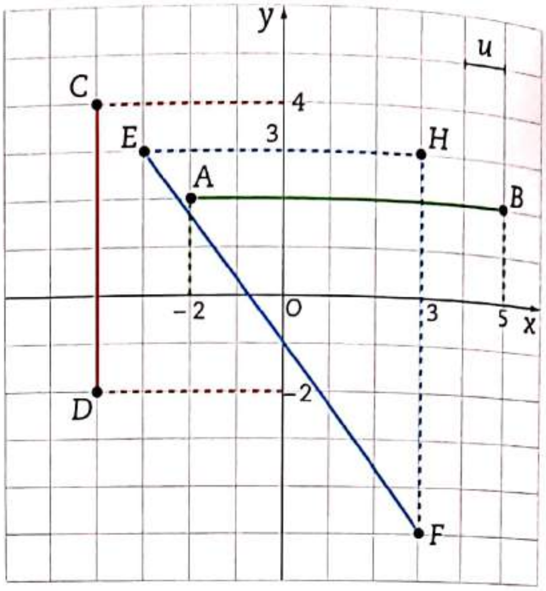
- Il punto medio M di un segmento AB ha come coordinate le semisomme della coordinate degli estremi A e B.

  Ad esempio, il punto medio del segmento AB di estremi A(− 5; − 1) e B(+ 3; + 5) ha come coordinate:

$$\mathbf{M} = \left(\frac{+5-3}{2};\ \frac{-1+5}{2}\right) = \left(\frac{2}{2};\ +\frac{4}{2}\right) = \mathbf{(-1;\ 2)}$$



- La distanza fra due punti qualsiasi, ovvero la lunghezza del segmento avente tali punti per estremi, è data:
  - dalla differenza, in valore assoluto, delle ascisse degli estremi se i punti sono allineati parallelamente all'asse x: $\mathbf{AB} = |x_1 - x_2| = |-2-5| = |-7| = \mathbf{7\ u}$
  - dalla differenza, in valore assoluto, delle ordinate degli estremi se i punti sono allineati parallelamente all'asse y: $\mathbf{CD} = |y_1 - y_2| = |4-(-2)| = |+6| = \mathbf{6\ u}$
  - dalla formula $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (teorema di Pitagora applicato nel triangolo *EFH*) se i punti sono generici nel piano:



$$\mathbf{EF} = \sqrt{(-3-3)^2 + (+3+5)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = \mathbf{10u}$$

nella storia

Il **metodo delle coordinate**, più esattamente il **metodo dei reticoli**, era conosciuto già dagli astronomi dell'antico Egitto, che rappresentavano le posizioni delle stelle su un reticolato, e anche dai Romani, che usavano un reticolato per progettare la costruzione delle città.

La moderna **geometria analitica** nasce però in epoca abbastanza recente, solo nel '600 con **Cartesio** (1596-1650), un matematico francese il cui vero nome è **René Descartes**, che sviluppa l'idea di fondere gli studi della geometria con i metodi dell'algebra.

Cartesio si occupò non solo di matematica, ma anche di fisica, medicina e filosofia. Ciò lo rese un uomo di scienze ammirato e richiesto dalle più importanti corti d'Europa.

Nel 1649 fu chiamato a Stoccolma alla corte della regina Cristina di Svezia, ma ciò gli procurò anche parecchi nemici e nel 1650 morì forse... ucciso da una dose letale di veleno.

Nella sua opera, intitolata *Géométrie*, egli getta le basi della **geometria analitica** applicando l'algebra allo studio di problemi geometrici.


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQUE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Avec Privilege.

Frontespizio del *Discours de la Méthode* di René Descartes, 1637.

Secondo Cartesio, infatti, ogni figura tracciata nel piano non è che un insieme di punti aventi ciascuno una ben determinata posizione che può essere descritta da due coordinate.

Ogni figura diventa quindi rappresentabile per mezzo di numeri e, viceversa, la geometria può chiarire in modo nuovo il numero: come dice lo stesso Cartesio in una sua opera, "*è applicando l'algebra dei moderni alla geometria degli antichi che si sono trovate le basi di una scienza meravigliosa*".

Cartesio (a destra) ritratto in una riunione di intellettuali a Parigi. Tra essi si riconosce Cristina di Svezia (a sinistra). Particolare di un dipinto di Dumesnil, fine XVII secolo.

Le funzioni $y = ax$ e $y = mx + p$

Ogni funzione matematica si può esprimere con una **formula matematica** che lega i valori numerici delle due variabili x ed y. Tale formula, che ci permette di passare dal valore della x al corrispondente valore della y, si chiama **equazione della funzione**.

Rappresentiamo nel piano cartesiano una funzione matematica espressa da un'**equazione di primo grado**, in cui i termini in x e y sono di 1° grado.

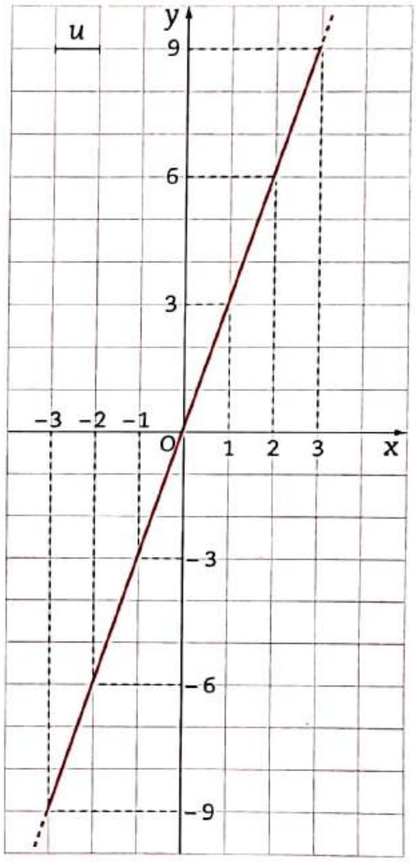
Un esempio di funzione di questo tipo è la **funzione della legge di proporzionalità diretta**: **$y = kx$**; ad esempio: la funzione che lega il valore x del lato di un triangolo equilatero al valore y del corrispondente perimetro:

$$y = 3x \quad \text{con} \quad x, y \in \mathbb{Q}$$

Rappresentiamola nel piano cartesiano costruendoci la tabella dei valori.

Tabella dei valori

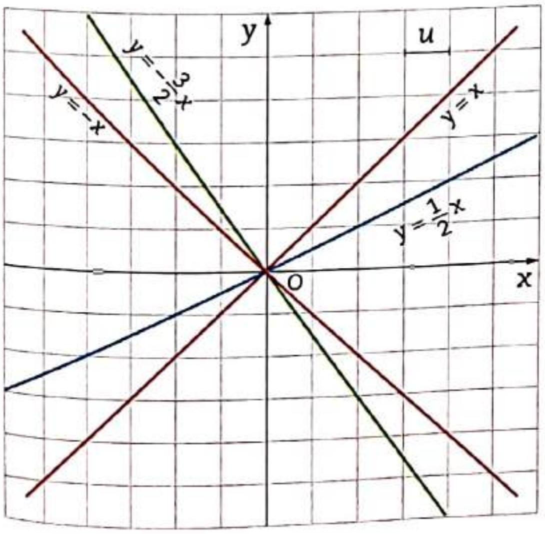
x	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
y	−9	−6	−3	0	3	6	9	...



Il diagramma cartesiano che abbiamo ottenuto (osserva la figura a lato) è **una retta passante per l'origine** degli assi.

Rappresentiamo in un piano cartesiano le rette di equazione:

$y = +\frac{1}{2}x$; $y = -\frac{3}{2}x$; $y = x$; $y = -x$



Come puoi osservare esse, al variare del coefficiente della x, variano la propria inclinazione rispetto all'asse x.

Riassumiamo quanto abbiamo osservato dicendo che:

Una funzione del tipo $y = ax$ è l'equazione di una **retta passante per l'origine degli assi**. Il coefficiente della x, a, è detto **coefficiente angolare** della retta e ne caratterizza l'inclinazione rispetto all'asse x.

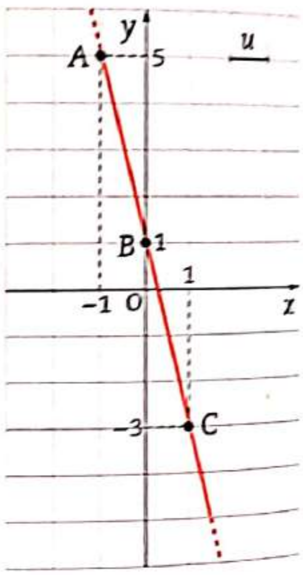
Al variare di a, la funzione rappresenta quindi il fascio di rette di centro **O**, in particolare:
- per $a > 0$ rappresenta le rette del fascio giacenti nel 1° e 3° quadrante;
- per $a < 0$ rappresenta le rette del fascio giacenti nel 2° e 4° quadrante;
- per $a = 1$ rappresenta la retta bisettrice del 1° e 3° quadrante;
- per $a = -1$ rappresenta la retta bisettrice del 2° e 4° quadrante.

Una funzione del tipo $y = ax$ è quindi l'equazione di una **retta passante per l'origine degli assi**.
E se la retta non passa per l'origine, qual è la sua equazione?

Rappresentiamo per punti un'equazione del tipo $y = -4x + 1$.

Tabella dei valori

x	-1	0	$+1$	...
y	$+5$	$+1$	-3	...



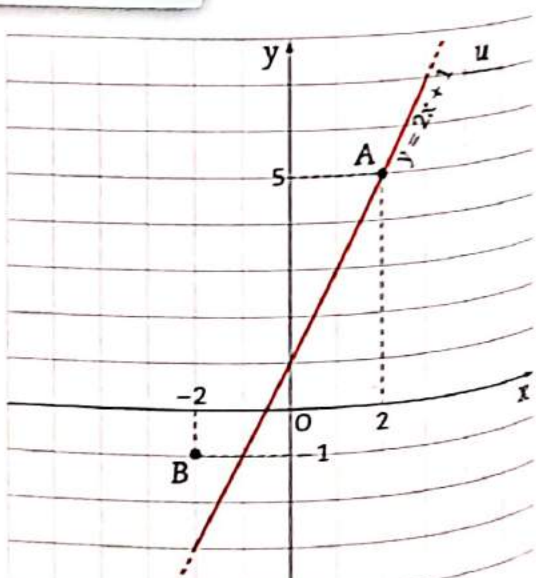
Rappresentando nel piano cartesiano questi valori, cioè i punti $A(-1; +5)$, $B(0; +1)$, $C(+1; -3)$, e unendoli ci accorgiamo che appartengono tutti a una stessa retta.
Diciamo quindi che:

- Un'equazione del tipo $y = mx + p$ è l'equazione di una **retta generica nel piano cartesiano**.
- Il termine m è il **coefficiente angolare** e caratterizza l'inclinazione della retta rispetto all'asse x.
- Il termine noto p rappresenta l'ordinata del punto in cui la retta incontra l'asse y e prende il nome di **ordinata all'origine**.

Data una retta qualsiasi nel piano cartesiano, possiamo stabilire se un punto A appartiene o no a questa retta graficamente e algebricamente.
Osserva.

Sia $y = 2x + 1$ la nostra retta, verifichiamo se i punti $A(+2; +5)$ e $B(-2; -1)$ appartengono o no alla retta.

Per verificarlo graficamente, rappresentiamo retta e punti in un piano cartesiano. Otteniamo il grafico a fianco, che ci dice che **A appartiene alla retta** e **B non appartiene alla retta**.



Per verificarlo algebricamente, sostituiamo nell'equazione della retta a x e y i valori del punto A e del punto B:

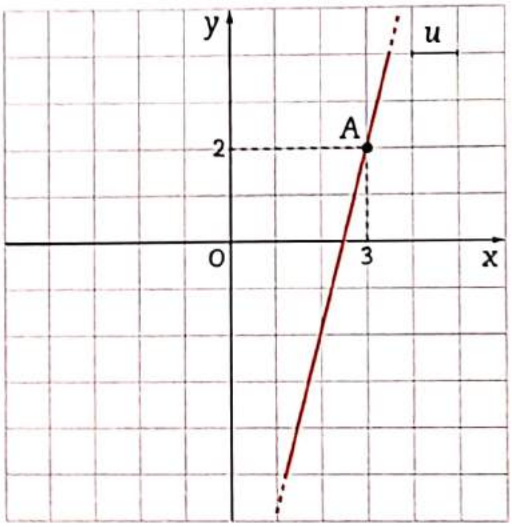
- $A(+2; +5) \rightarrow 5 = 2(2) + 1 \quad 5 = 4 + 1 \quad 5 = 5$
  Poiché le coordinate del punto A soddisfano l'equazione della retta, affermiamo che **il punto A appartiene alla retta**.
- $B(-2; -1) \rightarrow -1 = 2(-2) + 1 \quad -1 = -4 + 1 \quad -1 = -3$
  Poiché le coordinate del punto B non soddisfano l'equazione della retta, affermiamo che **il punto B non appartiene alla retta**.

Equazione di una retta passante per un punto e di coefficiente angolare assegnato

Qual è l'equazione della retta passante per il punto A(3; 2) e avente il coefficiente angolare $m = 4$?

Per rispondere a questa domanda, consideriamo che:

- se è $m = 4$, la retta ha equazione $y = 4x + p$;
- se deve passare per il punto A(3; 2), le coordinate di questo punto devono soddisfare l'equazione $y = 4x + p$.



Per calcolare p basta quindi sostituire nell'equazione le coordinate di A.

Avremo: $2 = 4 \cdot 3 + p$, $2 = 12 + p$, da cui $2 - 12 = p$, ovvero $\mathbf{p = -10}$. Sostituendo questo valore nell'equazione $y = 4x + p$, avremo l'equazione della retta passante per il punto A(3; 2) e avente il coefficiente angolare $m = 4$:

$$y = 4x - 10$$

Possiamo arrivare all'equazione della retta applicando la seguente formula:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

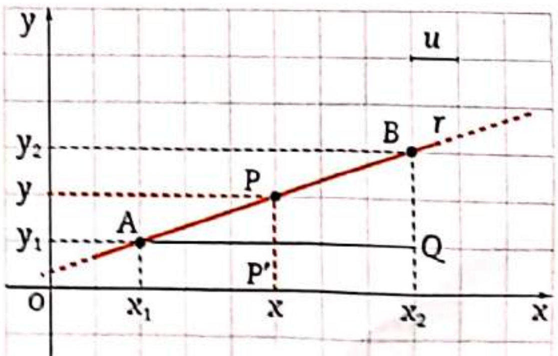
essendo x_0 e y_0 le coordinate generiche del punto A.

Verifichiamolo con l'esempio prima svolto:
$y - 2 = 4 \cdot (x - 3)$, da cui: $y = 2 + 4x - 12$ e quindi: $y = 4x - 10$.

Equazione di una retta passante per due punti

Qual è l'equazione della retta r passante per i punti $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$?

Per rispondere a questa domanda, rappresentiamo i punti A e B sul piano cartesiano e, sulla retta congiungente i punti A e B, consideriamo un punto generico $P(x; y)$.



Osserviamo ora i triangoli AQB e AP'P: essi sono simili per il primo criterio di similitudine, per cui possiamo scrivere: $\frac{PP'}{BQ} = \frac{AP'}{AQ}$.

Poiché $PP' = y - y_1$; $BQ = y_2 - y_1$; $AP' = x - x_1$ e $AQ = x_2 - x_1$, la proporzione $\frac{PP'}{BQ} = \frac{AP'}{AQ}$ diventa:

$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, che è l'equazione della retta r passante per i punti A e B.

Riassumiamo quanto detto dicendo che:

- L'equazione di una retta passante per il punto $A(x_0; y_0)$ e avente il coefficiente angolare m è: $\mathbf{y - y_0 = m \cdot (x - x_0)}$.
- L'equazione di una retta r passante per i punti $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ è:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Esempi

1. Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $A(+5; -3)$ e avente coefficiente angolare uguale a 2.

Applicando la formula $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$, avremo:
$y + 3 = 2(x - 5)$, da cui: $y = 2x - 10 - 3$, e quindi: $\mathbf{y = 2x - 13}$

2. Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $A(+2; +3)$ e $B(+3; +4)$.

Applicando la formula $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, avremo:

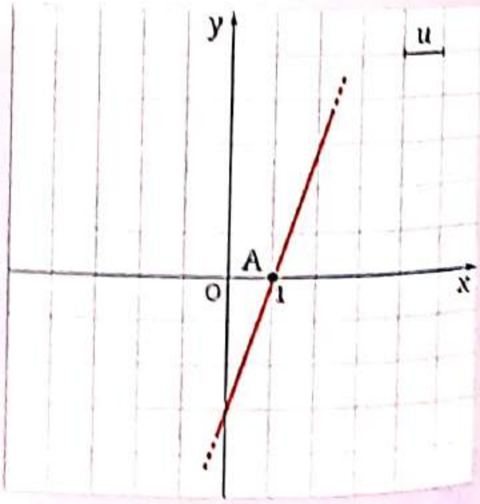
$\frac{y - 3}{4 - 3} = \frac{x - 2}{3 - 2}$; $y - 3 = x - 2$; $y = x - 2 + 3$; $\mathbf{y = x + 1}$

••• per riflettere

Saper rappresentare una retta qualsiasi nel piano cartesiano ortogonale ci permette di risolvere un'equazione di 1° grado a un'incognita graficamente. Osserva.

Consideriamo l'equazione $\mathbf{4x + 3 = x + 6}$ e risolviamola, come sai, algebricamente:

$4x + 3 = x + 6$ $\quad$ $4x - x = 6 - 3$ $\quad$ $3x = 3x = \mathbf{1}$



Per risolverla graficamente trasferiamo tutti i termini al primo membro: $4x + 3 = x + 6$

$4x + 3 - x - 6 = 0$

$\mathbf{3x - 3 = 0}$

Consideriamo quindi la retta avente come equazione il primo membro, $\mathbf{y = 3x - 3}$ e rappresentiamola nel piano cartesiano.

Osserviamo che risolvere l'equazione $\mathbf{3x - 3 = 0}$ equivale a trovare l'ascissa del punto in cui la retta $\mathbf{y = 3x - 3}$ ha ordinata uguale a zero, ovvero l'ascissa del punto di intersezione fra la retta e l'asse x.

Dal grafico constatiamo che il punto in cui questa retta incontra l'asse $\mathbf{x}$ è $\mathbf{A(1; 0)}$: la sua ascissa, $\mathbf{1}$, è quindi la soluzione dell'equazione, come avevamo ottenuto algebricamente.

Rette parallele e rette perpendicolari

- Rappresentiamo le due rette di equazione:

$$y = +\frac{1}{3}x + 2 \quad \text{e} \quad y = +\frac{1}{3}x - 3.$$

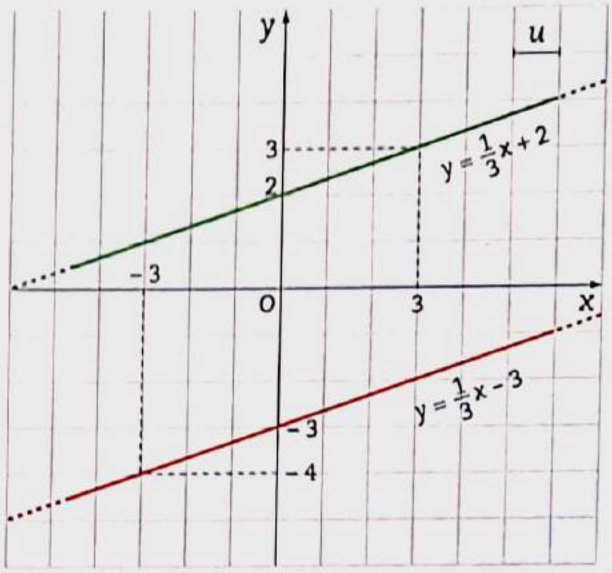


Tabelle di valori

x	0	+3
y	+2	+3

x	0	−3
y	−3	−4

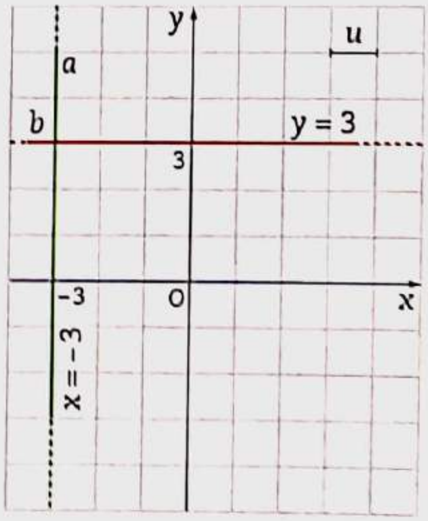
Osservando le due rette notiamo che sono **parallele** ed esaminando le loro equazioni notiamo che **hanno lo stesso coefficiente angolare**, $+\frac{1}{3}$.

Esercizi da pag. 363 a pag. 394

Diciamo che:

Due rette di equazione rispettivamente $y = mx + p$ e $y = m'x + p'$ sono **parallele** se hanno lo stesso coefficiente angolare, cioè se $m = m'$.

Che tipo di rette sono a e b, rispettivamente di equazione $x = -3$ e $y = +3$, rappresentate nel piano cartesiano a fianco?



– La retta a è formata da punti aventi tutti ascissa uguale a −3, che sono quindi tutti allineati parallelamente all'asse y. Diremo che la retta di equazione $x = -3$ è **parallela all'asse y**.

– La retta b è formata da punti aventi tutti ordinata uguale a +3, che sono quindi tutti allineati parallelamente all'asse x. Diremo che la retta di equazione $y = +3$ è **parallela all'asse x**.

Possiamo affermare quindi che:

- L'equazione $x = a$ è l'equazione di una retta **parallela all'asse y**. Al variare di a, essa rappresenta:
  - per $a > 0$ le rette del fascio parallele all'asse y nel 1° e 4° quadrante;
  - per $a < 0$ le rette del fascio parallele all'asse y nel 2° e 3° quadrante;
  - per $a = 0$ l'asse y.
- L'equazione $y = b$ è l'equazione di una retta **parallela all'asse x**. Al variare di b, essa rappresenta:
  - per $b > 0$ le rette del fascio parallele all'asse x nel 1° e 2° quadrante;
  - per $b < 0$ le rette del fascio parallele all'asse x nel 3° e 4° quadrante;
  - per $b = 0$ l'asse x.

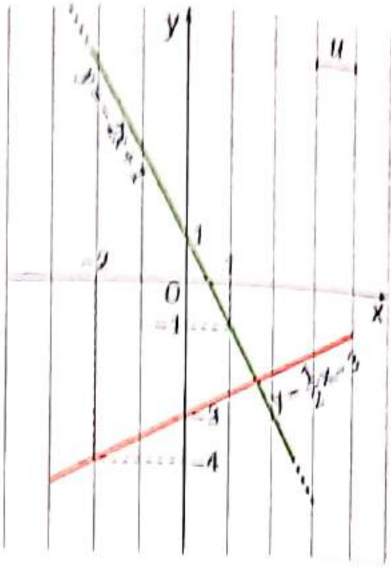
- Rappresentiamo adesso le due rette di equazione:

$y = -2x + 1$ e $y = +\frac{1}{2}x - 3$

Tabelle di valori

x	0	+1
y	+1	−1

x	0	−2
y	−3	−4



Osservando le due rette notiamo che sono **perpendicolari** ed esaminando le loro equazioni notiamo che hanno i **coefficienti angolari uno opposto e inverso dell'altro**, -2 e $+\frac{1}{2}$.

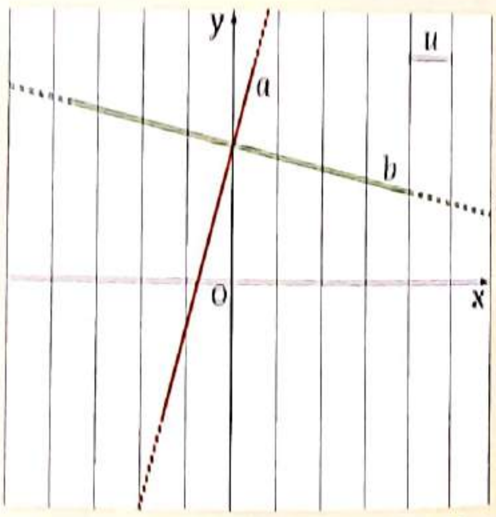
Diciamo che:

> Due rette di equazione rispettivamente $y = mx + p$ e $y = m'x + p'$ sono **perpendicolari** se hanno i coefficienti angolari uno opposto e inverso dell'altro, cioè se $m \cdot m' = -1$.

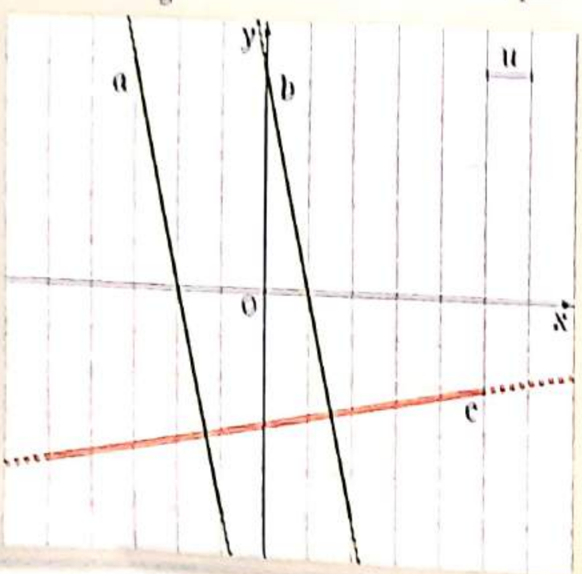
Esempi

1. Stabilire la reciproca delle rette $a \rightarrow y = 4x + 3$ e $b \rightarrow y = -\frac{1}{4}x + 3$ e verificarlo graficamente.

- Le due rette hanno coefficiente angolare uno opposto e inverso dell'altro, 4 e $-\frac{1}{4}$, quindi sono **perpendicolari**.
- Verifichiamolo graficamente rappresentando le rette nel piano cartesiano. Osserviamo che esse risultano perpendicolari.



2. Rappresentare nel piano cartesiano le rette: $a \rightarrow y = -5x - 10$, $b \rightarrow y = -5x + 5$ e $c \rightarrow y = \frac{1}{5}x - 3$ e verificare la loro posizione reciproca.



- Le rette a e b hanno lo stesso coefficiente, -5, quindi sono **parallele**.
- Le rette a e c hanno coefficiente uno opposto e inverso dell'altro, -5 e $\frac{1}{5}$, quindi sono **perpendicolari**.
- Le rette b e c hanno coefficiente uno opposto e inverso dell'altro, -5 e $\frac{1}{5}$, quindi sono **perpendicolari**.

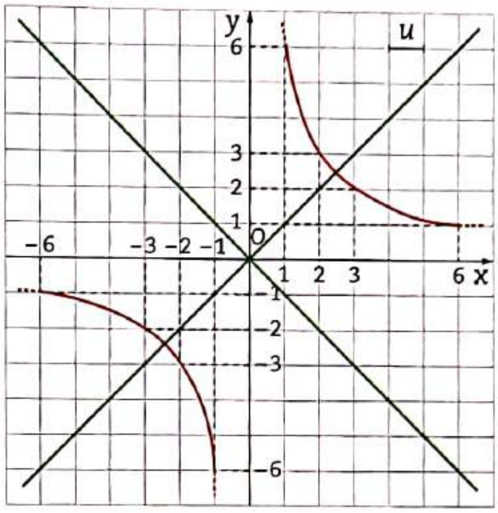
La funzione $y = a/x$

Consideriamo adesso funzioni rappresentate da **equazioni di secondo grado**, o **quadratiche**, funzioni cioè dove i termini in x e in y sono monomi di 2° grado. Una funzione di questo tipo è la funzione della legge di proporzionalità inversa: $xy = h$, ovvero $y = h/x$.

- Consideriamo, ad esempio, la funzione che lega il valore dell'altezza x al corrispondente valore della base y nell'insieme dei rettangoli equivalenti aventi l'area di 6 cm²: $xy = 6$, ovvero $y = \frac{6}{x}$ con $x, y \in \mathbb{Q}$ e rappresentiamola nel piano cartesiano.

Tabella dei valori

x	1	−1	2	−2	3	−3	6	−6
y	6	−6	3	−3	2	−2	1	−1

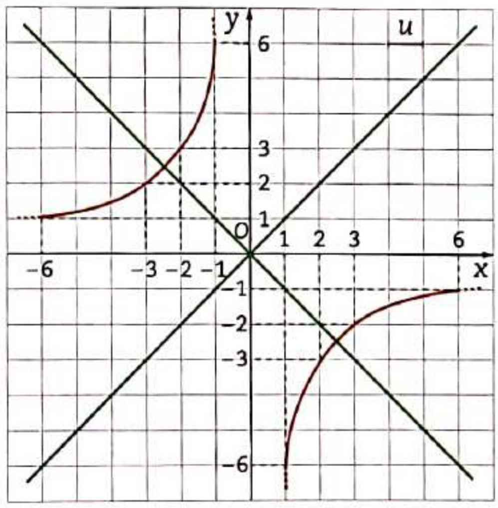


Rappresentiamo i punti nel piano cartesiano; unendoli otteniamo una curva detta **iperbole equilatera** formata da due rami, giacenti uno nel 1° quadrante e l'altro nel 3° quadrante.
Gli assi x e y, a cui i due rami si avvicinano sempre più, senza però toccarli, si chiamano **asintoti** dell'iperbole. Le bisettrici dei quadranti sono i **due assi di simmetria** dell'iperbole, perpendicolari tra loro.

- Consideriamo adesso la funzione di equazione $y = -\frac{6}{x}$ e rappresentiamola nel piano cartesiano.

Tabella dei valori

x	1	−1	2	−2	3	−3	6	−6
y	−6	6	−3	3	−2	2	−1	1



Otteniamo ancora un'iperbole, i cui rami però sono uno nel 2° quadrante e l'altro nel 4° quadrante, simmetrici rispetto all'origine, avente gli assi x e y come asintoti e le bisettrici dei quadranti come assi di simmetria.

Se confrontiamo le due equazioni $y = \frac{6}{x}$ e $y = -\frac{6}{x}$, osserviamo che se il termine noto è maggiore di zero, l'iperbole sta nel 1° e nel 3° quadrante, se è minore di zero, l'iperbole sta nel 2° e nel 4° quadrante. Possiamo generalizzare e dire che:

Un'equazione del tipo $xy = k$ (con k numero relativo qualsiasi) è l'equazione di una curva detta **iperbole equilatera** avente gli assi cartesiani come **asintoti**, l'origine come **centro di simmetria** e le bisettrici dei quadranti come **assi di simmetria**. Se $k > 0$ l'iperbole giace nel 1° e nel 3° quadrante, se $k < 0$ l'iperbole giace nel 2° e nel 4° quadrante.

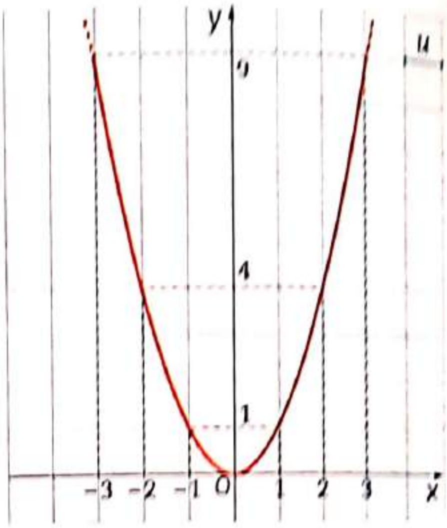
La funzione $y = ax^2$

Consideriamo due grandezze, per esempio il lato x di un quadrato e la sua area y, e la funzione che lega queste due grandezze, cioè $y = x^2$.

Rappresentiamo la funzione nel piano cartesiano.

Tabella dei valori

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	0	1	1	4	4	9	9



Congiungendo i punti della tabella, otteniamo una curva detta **parabola**. L'asse y, detto **asse della parabola**, è asse di simmetria e l'origine degli assi è il **vertice della parabola**.

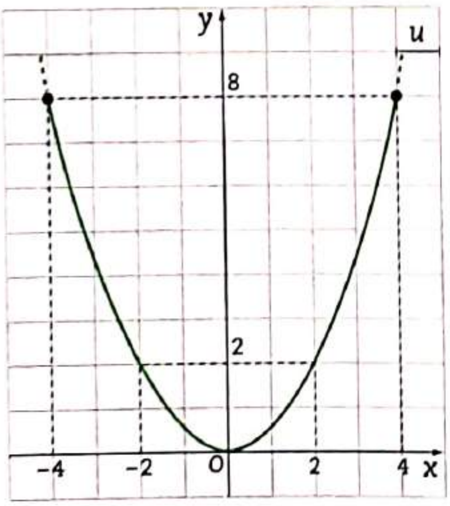
- Rappresentiamo nel piano cartesiano le parabole $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = -\frac{1}{3}x^2$.

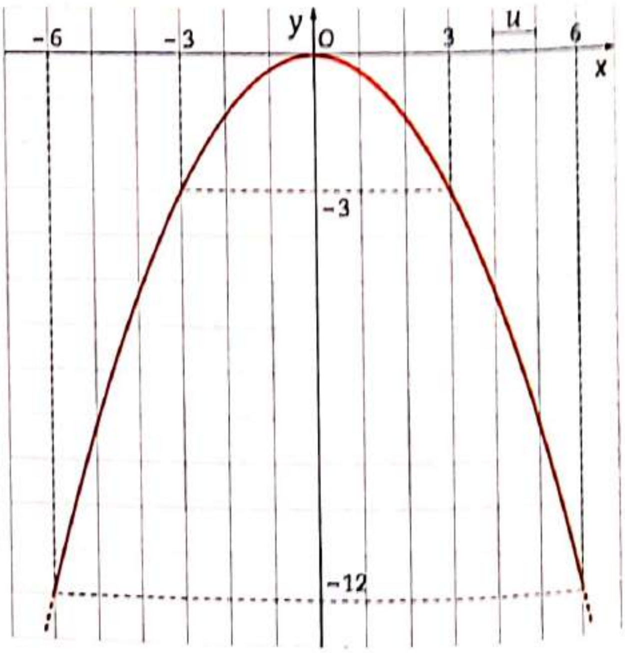
Tabella dei valori: $y = \frac{1}{2}x^2$

x	0	2	−2	4	−4
y	0	2	2	8	8

Tabella dei valori: $y = -\frac{1}{3}x^2$

x	0	3	−3	6	−6
y	0	−3	−3	−12	−12





Confrontando i grafici delle due parabole, osserviamo che:

- $y = \frac{1}{2}x^2$ ha la **concavità rivolta verso l'alto**;
- $y = -\frac{1}{3}x^2$ ha la **concavità rivolta verso il basso**.

Possiamo dedurre che è il coefficiente della x^2 (maggiore o minore di zero) che determina la concavità della parabola.

- Rappresentiamo nel piano cartesiano le seguenti parabole: $y = 2x^2$ e $y = \frac{1}{2}x^2$.

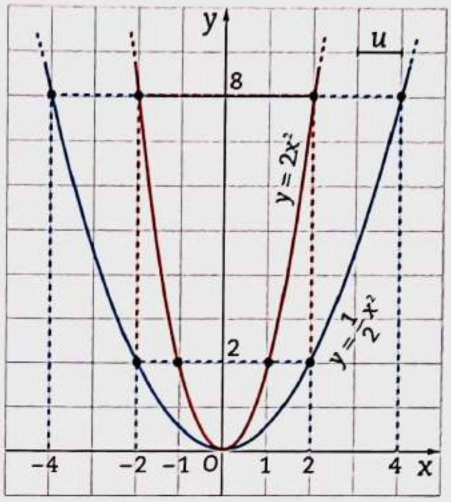


Tabella dei valori: $y = 2x^2$

x	0	1	−1	2	−2
y	0	2	2	8	8

Tabella dei valori: $y = \frac{1}{2}x^2$

x	0	2	−2	4	−4
y	0	2	2	8	8

- Rappresentiamo nel piano cartesiano le seguenti parabole: $y = -x^2$, $y = -\frac{1}{3}x^2$.

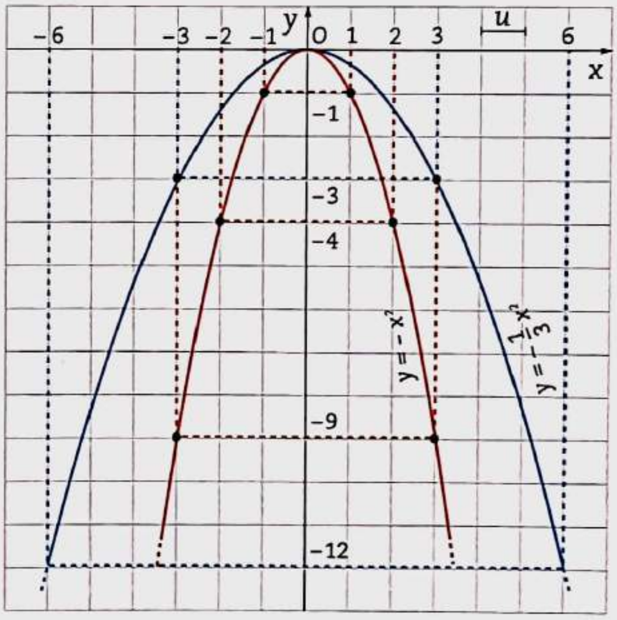


Tabella dei valori: $y = -x^2$

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	0	−1	−1	−4	−4	−9	−9

Tabella dei valori: $y = -\frac{1}{3}x^2$

x	0	3	−3	6	−6
y	0	−3	−3	−12	−12

Confrontando i grafici delle quattro parabole, osserviamo che:

- l'apertura della parabola $y = 2x^2$ è minore dell'apertura della parabola $y = \frac{1}{2}x^2$;
- l'apertura della parabola $y = -x^2$ è minore dell'apertura della parabola $y = -\frac{1}{3}x^2$.

Possiamo dedurre che è il valore del coefficiente della x^2 che determina l'apertura della parabola: al diminuire del suo valore assoluto, la parabola diventa più aperta.

Diciamo che:

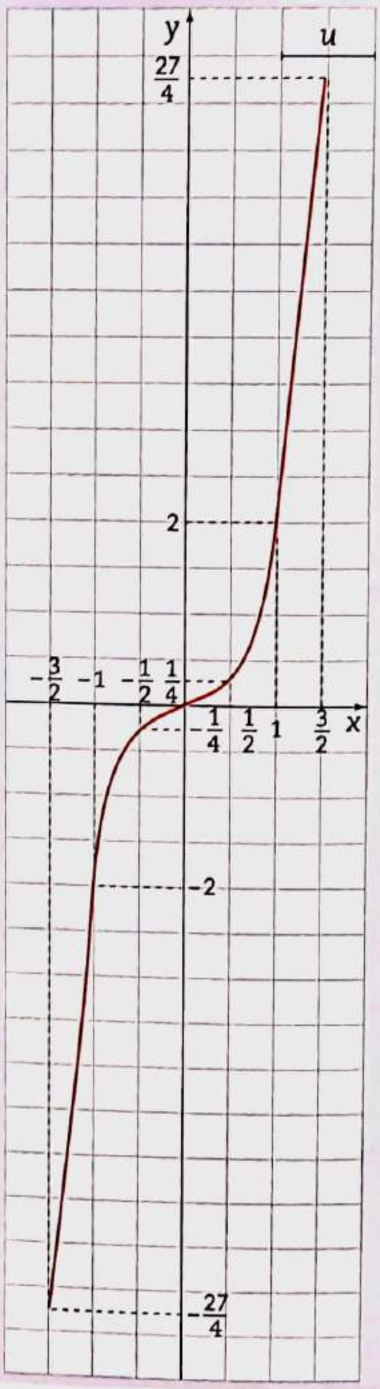
- Un'equazione del tipo $y = kx^2$ (con k numero relativo qualsiasi) è l'equazione di una curva detta **parabola** avente come asse di simmetria l'asse y e come vertice l'origine degli assi.
- Per $k > 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso il semiasse positivo delle y; per $k < 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso il semiasse negativo delle y.
- L'apertura della parabola **aumenta al diminuire del valore assoluto di k** e, viceversa, **diminuisce all'aumentare del valore assoluto di k**.

••• per riflettere

Un'equazione del tipo $y = kx^2$ è quindi l'equazione di una parabola.
Consideriamo adesso, invece, un'equazione del tipo $y = kx^3$, ad esempio l'equazione $y = 2x^3$, e rappresentiamola nel piano cartesiano.

Tabella dei valori

x	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	+1	−1	2	−2
y	0	$+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	+2	−2	+16	−16



Congiungendo i punti della tabella otteniamo una curva detta **parabola cubica**, i cui rami sono simmetrici rispetto all'origine e si sviluppano nel 1° e nel 3° quadrante: nel 1° quadrante la concavità è verso l'alto, nel 3° quadrante la concavità è verso il basso.

Se adesso provi a rappresentare l'equazione $y = -2x^3$, otterrai una parabola cubica i cui rami sono simmetrici rispetto all'origine e si sviluppano nel 2° e nel 4° quadrante: nel 2° quadrante la concavità è verso l'alto, nel 4° quadrante la concavità è verso il basso.

ricorda

1

- Una funzione del tipo $y = ax$ è l'equazione di una **retta passante per l'origine degli assi**. Il coefficiente della x, a, è detto **coefficiente angolare** della retta e ne caratterizza l'inclinazione rispetto all'asse x. Al variare di a, la funzione rappresenta quindi il fascio di rette di centro **O**, in particolare:
  - per $a > 0$ rappresenta le rette del fascio giacenti nel 1° e 3° quadrante;
  - per $a < 0$ rappresenta le rette del fascio giacenti nel 2° e 4° quadrante;
  - per $a = 1$ rappresenta la retta bisettrice del 1° e 3° quadrante;
  - per $a = -1$ rappresenta la retta bisettrice del 2° e 4° quadrante.
- Un'equazione del tipo $y = mx + p$ è l'equazione di una **retta generica nel piano cartesiano**.
- Il termine m è il **coefficiente angolare** e caratterizza l'inclinazione della retta rispetto all'asse x.
- Il termine noto **p** rappresenta l'ordinata del punto in cui la retta incontra l'asse y e prende il nome di **ordinata all'origine**.
- L'equazione di una retta passante per il punto $A(x_0; y_0)$ e avente il coefficiente angolare m è: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.
- L'equazione di una retta r passante per i punti $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ è:
  $$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

2

- Due rette di equazione rispettivamente $y = mx + p$ e $y = m'x + p'$ sono **parallele** se hanno lo stesso coefficiente angolare, cioè se $m = m'$.
- L'equazione $x = a$ è l'equazione di una retta **parallela all'asse y**. Al variare di a, essa rappresenta:
  - per $a > 0$ le rette del fascio parallele all'asse y nel 1° e 4° quadrante;
  - per $a < 0$ le rette del fascio parallele all'asse y nel 2° e 3° quadrante;
  - per $a = 0$ l'asse y.
- L'equazione $y = b$ è l'equazione di una retta **parallela all'asse x**. Al variare di b, essa rappresenta:
  - per $b > 0$ le rette del fascio parallele all'asse x nel 1° e 2° quadrante;
  - per $b < 0$ le rette del fascio parallele all'asse x nel 3° e 4° quadrante;
  - per $b = 0$ l'asse x.
- Due rette di equazione rispettivamente $y = mx + p$ e $y = m'x + p'$ sono **perpendicolari** se hanno i coefficienti angolari uno opposto e inverso dell'altro, cioè se $m \cdot m' = -1$.

3

- Un'equazione del tipo $xy = k$ (con k numero relativo qualsiasi) è l'equazione di una curva detta **iperbole equilatera** avente gli assi cartesiani come **asintoti**, l'origine come **centro di simmetria** e le bisettrici dei quadranti come **assi di simmetria**. Se $k > 0$ l'iperbole giace nel 1° e nel 3° quadrante, se $k < 0$ l'iperbole giace nel 2° e nel 4° quadrante.
- Un'equazione del tipo $y = kx^2$ (con k numero relativo qualsiasi) è l'equazione di una curva detta **parabola** avente come asse di simmetria l'asse y e come vertice l'origine degli assi.
  Per $k > 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso il semiasse positivo delle y; per $k < 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso il semiasse negativo delle y.
  L'apertura della parabola **aumenta al diminuire del valore assoluto di k** e, viceversa, **diminuisce all'aumentare del valore assoluto di k**.

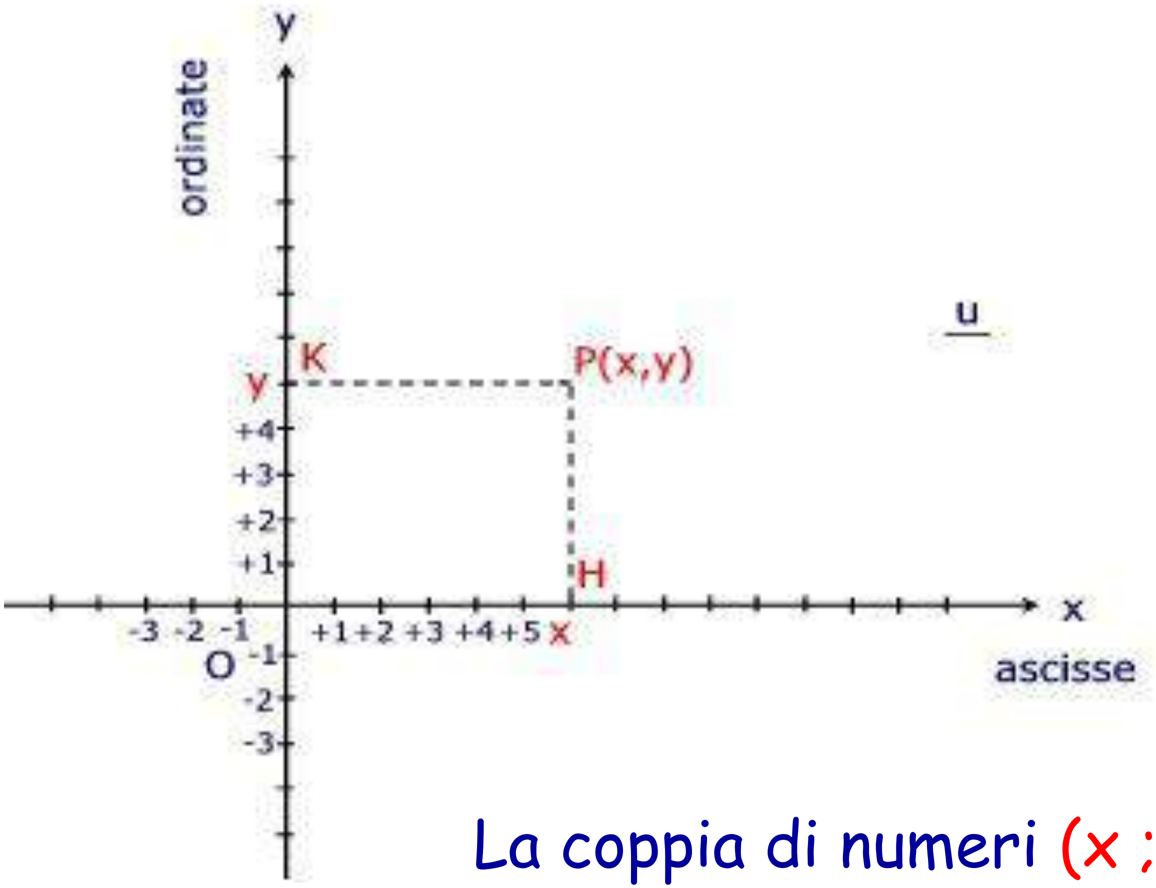
“Il piano cartesiano e la retta”

Mappe, esercizi, approfondimenti

MAPPA ARGOMENTI

IL PIANO CARTESIANO

- PUNTI E SEGMENTI
  - Punto medio di un segmento
  - Distanza fra due punti
- FUNZIONI LINEARI: LE RETTE
  - Equazione della retta
  - rette parallele e perpendicolari
  - coefficiente angolare

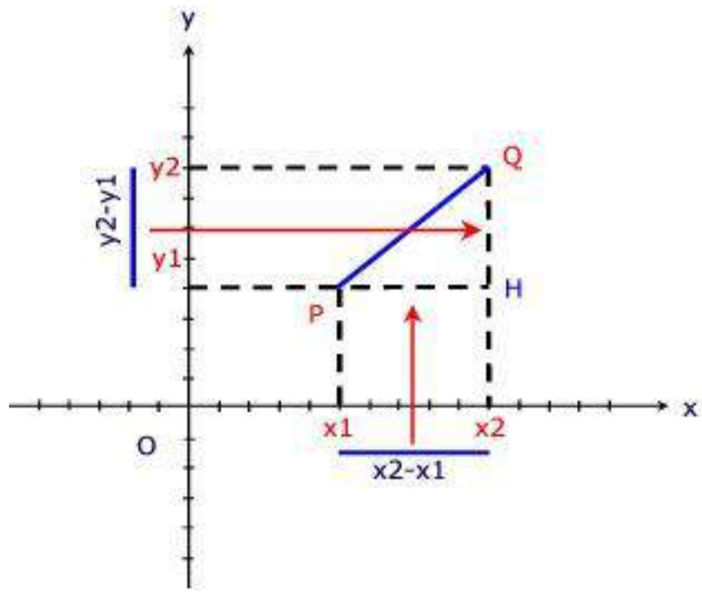


La coppia di numeri (x ; y) si chiamano
<u>coordinate</u> del punto P:
x è l'ascissa y è l'ordinata.
Si scrivono sempre in questo ordine:
PRIMA la x, DOPO la y

DISTANZA TRA DUE PUNTI

$P\,(X_1;Y_1) \qquad Q\,(X_2;Y_2)$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$



DISTANZA TRA DUE PUNTI: esempio

P (-3; 4)   Q (1/2; -1)

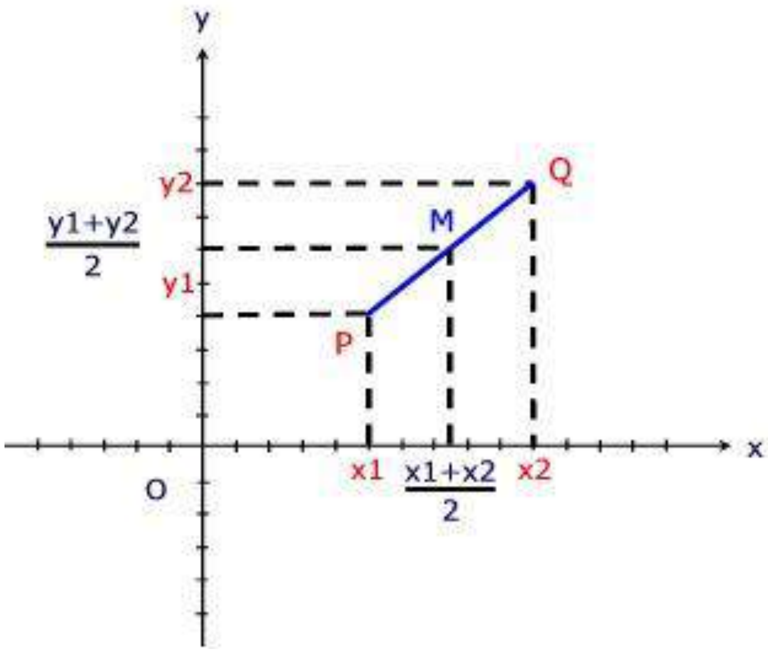
$$\overline{PQ} = \sqrt{\left[\frac{1}{2} - (-3)\right]^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + 3\right)^2 + (-5)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 25} = \sqrt{\frac{49}{4} + 25} = \sqrt{\frac{149}{4}} = \frac{\sqrt{149}}{\sqrt{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{149}}{2}}$$

Distanza PQ

PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

$$X_M = \frac{X_1 + X_2}{2} \qquad\qquad Y_M = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$



ESERCIZI

1. **Dati i punti A (3;-2) e B (-5; 4):**
    - Rappresentali sul piano;
    - Calcola la loro distanza;
    - Calcola le coordinate del punto medio.

2. **Dati i punti A (0;-7) e B (1; 6):**
    - Rappresentarli sul piano;
    - Calcolare la loro distanza;
    - Calcolare le coordinate del punto medio

EQUAZIONE DI UNA RETTA

FORMA ESPLICITA

$$y = mx + q$$

$$y = 3x + 5$$

FORMA IMPLICITA

$$Ax + by + c = 0$$

$$3x - y + 5 = 0$$

COEFFICIENTE ANGOLARE DI UNA RETTA

FORMA ESPLICITA

$y = mx + q$

m

Esempio:

$y = 3x + 5$

$m = 3$

FORMA IMPLICITA

$ax + by + c = 0$

$$-\frac{a}{b}$$

Esempio:

$3x - y + 5 = 0$

$$m = -\frac{3}{-1} = 3$$

$y = m x + q$

RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE

$q = 0$

$y = 4x$

RETTA **NON** PASSANTE PER L'ORIGINE

$q \neq 0$

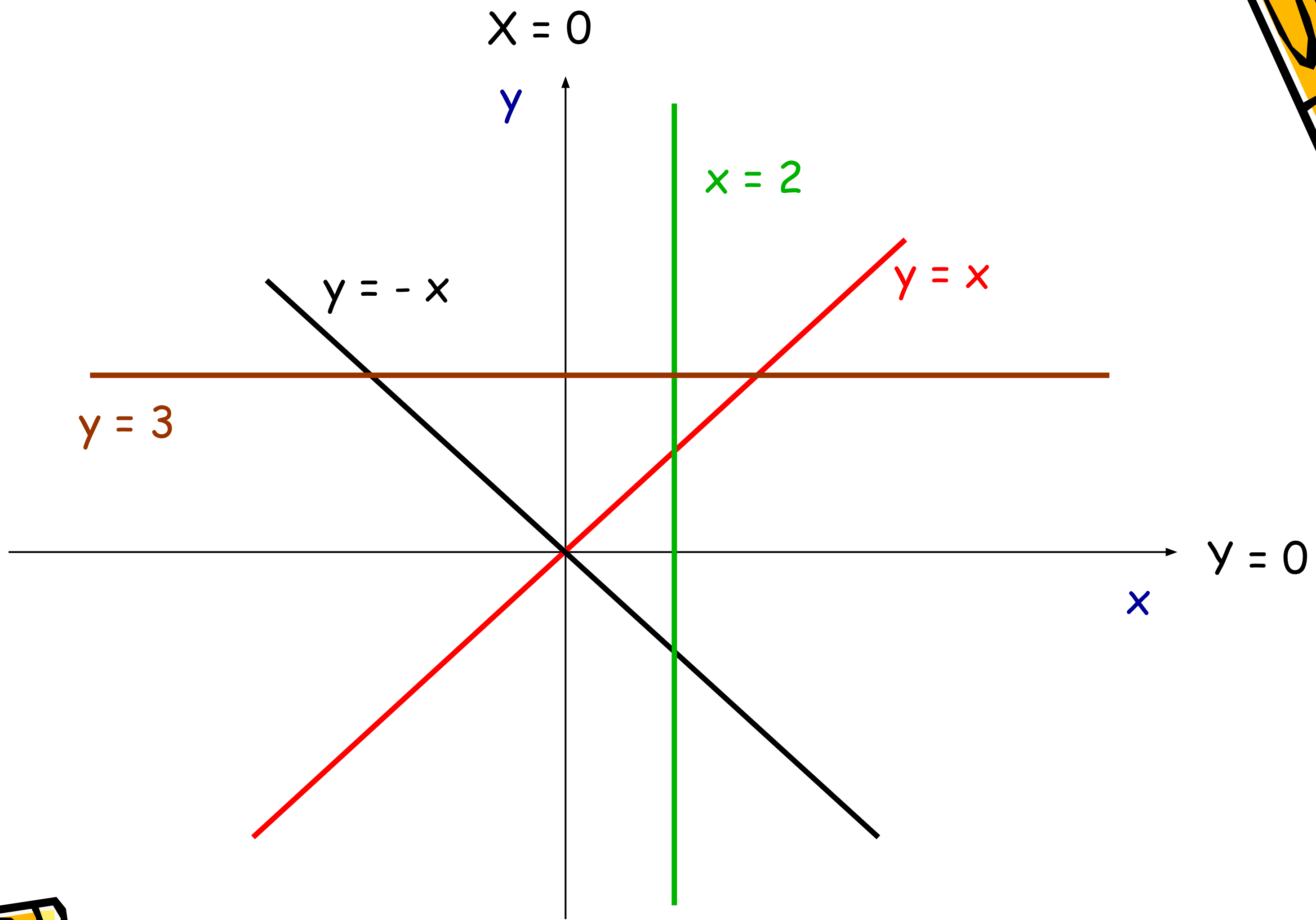
$y = 6x + 9$

CASI PARTICOLARI DI RETTE

- $y = k$ Rette parallele all'asse x
- $y = x$ Bisettrice del I e III quadrante
- $x = k$ Rette parallele all'asse y
- $y = -x$ Bisettrice del II e IV quadrante
- $X = 0$ asse y
  $Y = 0$ asse x

Esempi:

$Y = 3$ retta parallela all'asse x
$X = 2$ retta parallela all'asse y



X = 0
y
x = 2
y = - x
y = x
y = 3
Y = 0
x

ESERCIZI

Date le seguenti rette

$Y = 3x - 1$

$3x + 2y - 5 = 0$

$X + 4y - 3 = 0$

$Y = 5x$

$6x - y = 0$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

- Indica quali tra esse sono in forma implicita e quali in forma esplicita;
- Calcola il coefficiente angolare di ogni retta;
- Indica quali tra esse passano per l'origine;
- Rappresentale nel piano cartesiano.

RETTE PARALLELE

HANNO LO **STESSO** COEFFICIENTE ANGOLARE

$Y = m x + q$

$Y = m_1 x + q_1$

PARALLELE //

$$m = m_1$$

RETTE PERPENDICOLARI

$Y = m x + q$

$Y = m_1 x + q_1$

PERPENDICOLARI $\perp$

$$m_1 = -\frac{1}{m}$$

Esempi di rette parallele e perpendicolari

1. Date le rette di equazione $y = 3x + 5$ e $y = 3x - 2$

sono parallele perché hanno lo stesso coefficiente angolare $m = 3$

2. Date le rette di equazione $y = 5x - 1$ e $y = -\frac{1}{5}x$

sono perpendicolari perché $-\frac{1}{5}$ è l'opposto dell'inverso di 5

Esempi di rette parallele e perpendicolari

3. Date le rette in forma implicita

$$2x - 4y + 1 = 0 \quad e \quad x - 2y + 5 = 0$$

sono parallele infatti hanno lo stesso coefficiente angolare

$$m = \frac{1}{2}$$

4. Date le rette in forma implicita

$$3x - 5y + 2 = 0 \qquad e \qquad 15x + 9y - 2 = 0$$

sono perpendicolari infatti

I coefficienti sono antireciproci:

$$m1 = \frac{3}{5} \qquad m2 = -\frac{5}{3}$$

ESERCIZI

1. Date le rette di equazione

$x - 5y + 1 = 0$ $\qquad$ $2x - 4y + 3 = 0$ $\qquad$ $x - 2y = 0$

$\frac{3}{4}x - 2y = 5$ $\qquad$ $y = \frac{8}{3}x - 6$ $\qquad$ $\frac{1}{5}x - y + 2 = 0$

Individua tra esse le rette tra loro parallele

2. Date le rette di equazione

$x - y + 1 = 0$ $\qquad$ $y + x - 3 = 0$ $\qquad$ $3x + y = 2$

$6x - 2y - 7 = 0$ $\qquad$ $3x - y + 5 = 0$ $\qquad$ $x + 3y - 1 = 0$

Individua tra esse le rette tra loro perpendicolari

EQUAZIONE DI UNA RETTA passante per UN PUNTO P e di COEFFICIENTE ANGOLARE m

$$y = m x + q$$

DATO 1: $m = 2$

DATO 2: P (3,4)

1. scrivo il valore di $m = 2$
nell'equazione:
$y = 2x + q$

2. sostituisco
le coordinate
del punto nell'equazione
della retta $4 = 2 \cdot 3 + q$

3. trovo il valore di q:
$4 = 6 + q$ $4 - 6 = q$
$q = -2$

4. scrivo l'equazione della
retta: $y = 2x - 2$

PRMO METODO

EQUAZIONE DI UNA RETTA passante per UN PUNTO P e di COEFFICIENTE ANGOLARE m

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

DATO 1: $m = -5$

DATO 2: $P\,(x_0; y_0)$

$P\,(3; 4)$

1. sostituisco 3 e 4 nella formula
   e ottengo $y - 4 = m\,(x - 3)$
2. sostituisco -5 ad m ed ottengo
   $y - 4 = -5\,(x - 3)$
3. faccio i conti: $y - 4 = -5x + 15$
   $y = -5x + 15 + 4$
4. ottengo l'equazione della retta
   $y = -5x + 19$

SECONDO METODO

ESERCIZI

Scrivi l'equazione della retta passante per il punto P e con m indicato

1. P(7, - 3) $m = -1$
2. P(5, -1) $m = -4$
3. P(2, 9) $m = \frac{2}{3}$
4. P(0, 2) $m = -7$

OSSERVAZIONI

Alcune volte **il coefficiente angolare non viene fornito in maniera diretta**, ma è necessario ricavarlo dal coefficiente angolare di altre rette

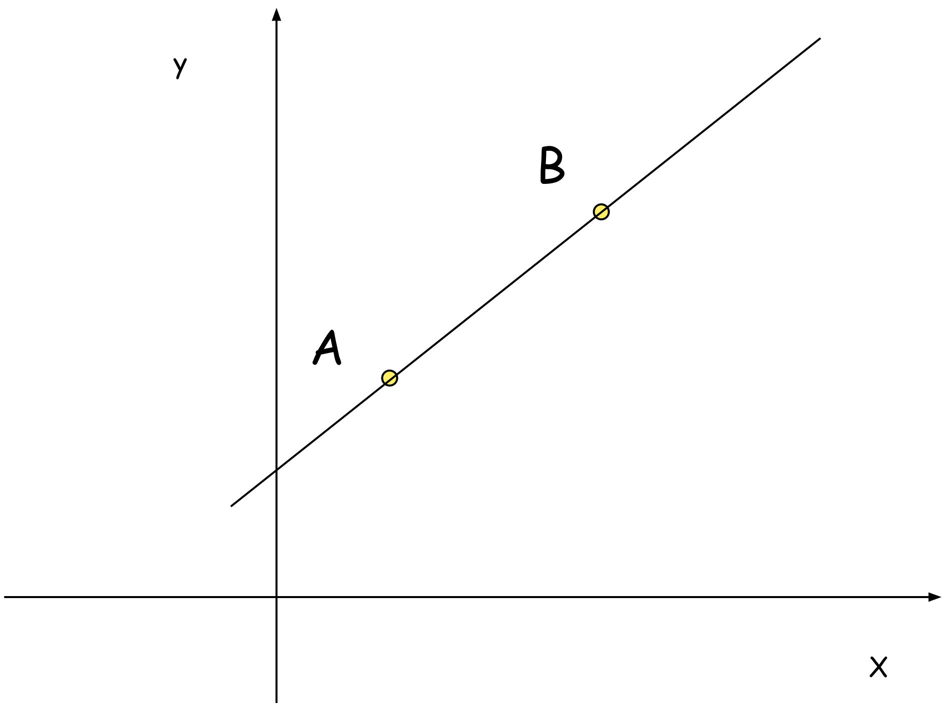
Esempio

Scrivi l'equazione delle retta s passante per P(6, 3) e parallela alla retta di equazione r: $2x - 5y + 1 = 0$.

s e r hanno lo stesso coefficiente angolare

Devo ricavare il coefficiente angolare di r e metto la retta in forma esplicita o applico la relazione opportuna

COEFFICIENTE ANGOLARE DI UNA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI



$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

EQUAZIONE DI UNA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI

$P(X_1,Y_1)$

$Q(X_2,Y_2)$

$$\frac{Y-Y_1}{Y_2-Y_1}=\frac{X-X_1}{X_2-X_1}$$

P(3,2)

Q(1,0)

$$\frac{Y-2}{0-2}=\frac{X-3}{1-3}$$

$$\frac{Y-2}{-2}=\frac{X-3}{-2}$$

$$Y-2=X-3$$

$$Y=X-3+2$$

$$Y=X-1$$

ESERCIZI

1. Scrivi l'equazione della retta passante per il punto p(4,-6) e parallela alla retta di equazione 2y – 9 =0
2. Scrivi l'equazione della retta passante per il punto P(3, -2) e perpendicolare alla retta di equazione $Y = \frac{3}{4}X - \frac{9}{4}$
3. Scrivi l'equazione della retta passante per i punti A(2,2) e B(-3,-1)
4. Scrivi l'equazione della retta passante per i punti A $\left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{2}\right)$ e B(-2, -1)

INTERSEZIONE TRA RETTE

Per ottenere le coordinate del **punto P** d'intersezione tra due rette risolviamo il sistema tra le equazioni delle due rette

RETTE:
3x - 2y - 5= 0
X + y – 5 = 0

$$\begin{cases} 3X - 2Y - 5 = 0 \\ X + Y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$Y = -X + 5 \Rightarrow 3X - 2(-X + 5) - 5 = 0$$

$$3X + 2X - 10 - 5 = 0$$

$$5X - 15 = 0 \Rightarrow X = 3 \Rightarrow Y = -3 + 5 = 2$$

P (3; 2)

ESERCIZI

1. Determina l'intersezione tra le rette

$$x + 2y = 3 \quad e \quad x - y = 0$$

2. Determina l'intersezione delle rette

$$2x + y = 5 \quad e \quad y = 1$$

FASCI DI RETTE

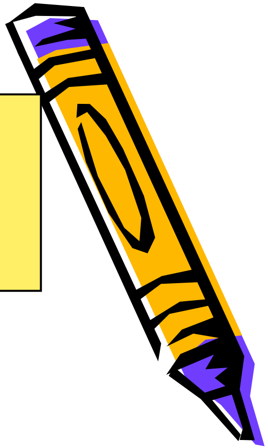
FASCIO IMPROPRIO

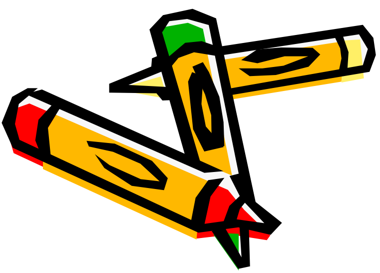
L'insieme delle infinite rette con la stessa direzione/inclinazione (con lo stesso m)

parallele ad una stessa retta che passa per O (0;0)

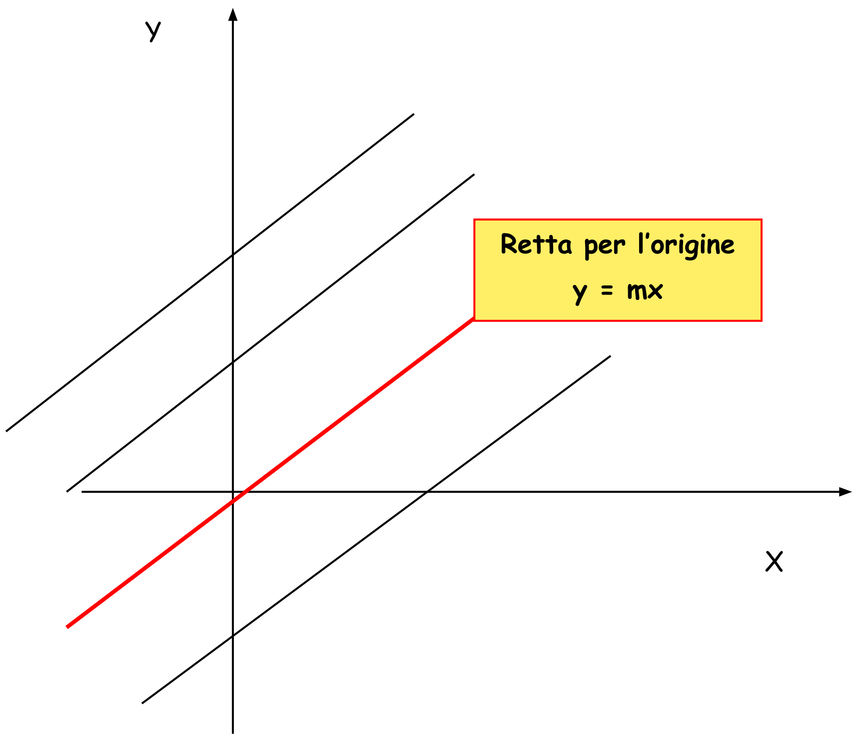
FASCIO PROPRIO

L'insieme delle infinite rette passanti per uno stesso punto detto Centro del fascio





FASCIO IMPROPRIO



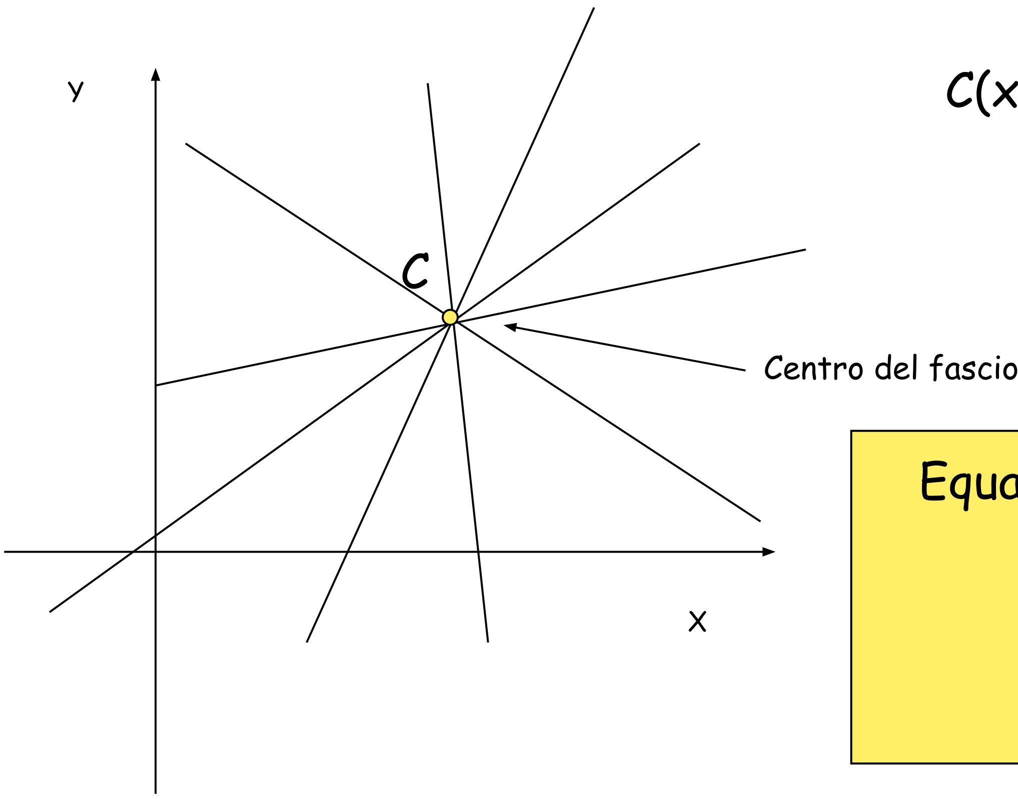
Equazione di un fascio improprio

$$y = mx + K$$

fisso

variabile

FASCIO PROPRIO



$C(x_0 ; y_0)$ centro del fascio

Equazione di un fascio proprio

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

variabile

Equazione della retta passante per un punto

$P(x_0 ; y_0)$

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

L'equazione di un fascio proprio di rette di centro P coincide con l'equazione di una generica retta passante per P al variare.

L'unica retta esclusa da tale fascio è quella passante per P e parallela all'asse y, in quanto le rette parallele all'asse y non hanno coefficiente angolare.

Per l'uso della formula indicata vedi gli esempi

buon lavoro!