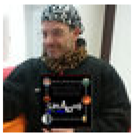
RISORSE DIDATTICHE.



【[ResearchGate Project](#)】 ***By … 0000-0001-5086-7401 & lnkd.in/erZ48tm***

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

ESEMPI SVOLTI DI EQUAZIONI DI VARIO GENERE

Non ci soffermeremo a studiare singolarmente tutti i tipi di “intralci” che incontreremo nella risoluzione di una equazione. Per quel che riguarda i raccoglimenti o i prodotti notevoli si rimanda alle dispense specifiche. Nelle pagine seguenti riportiamo una serie di esercizi svolti in cui in ognuno di essi c’è sempre qualcuna delle tipologie di “intralcio” esaminate nella dispensa sulle equazioni. Naturalmente “dichiareremo” sempre quale tecnica stiamo adottando.

ESEMPIO 1

Per risolvere l'equazione di primo grado

$$x + 2 - 3x = 3 + x - 7x + 5$$

trasportiamo tutti i termini con l'incognita x a sinistra dell'uguale, cambiandone il segno; portiamo tutti i termini senza l'incognita a destra dell'uguale, cambiando loro il segno.

$$x - 3x - x + 7x = 3 + 5 - 2$$

Sommiamo tra loro i termini simili

$$4x = 6$$

e dividiamo per 4 entrambi i membri

$$\frac{4}{4}x = \frac{6}{4}$$

Riduciamo ai minimi termini le frazioni, ricavando la soluzione dell'equazione

$$x = \frac{3}{2}$$

Ecco fatto!

Qui non c’era nessun “intralcio” iniziale. Siamo andati dritti alla meta.

ESEMPIO 2

(a) Consideriamo l'equazione

$$12x + 6 = 6x + 3$$

Il primo passaggio prevede di trasportare tutti i termini con l'incognita x al primo membro e tutti i termini noti al secondo. Attenzione: dobbiamo cambiare i segni a quei termini che passano da un membro all'altro!

$$12x - 6x = -6 + 3$$

Sommiamo i monomi simili

$$6x = -3$$

dopodiché dividiamo a destra e a sinistra per il coefficiente di x

$$\frac{6}{6}x = \frac{-3}{6}$$

Ridotte le frazioni ai minimi termini, scopriamo che l'equazione è soddisfatta per:

$$x = -\frac{1}{2}$$

Per verificare la correttezza del risultato basta sostituire x con $-\frac{1}{2}$ nella traccia: se dopo aver svolto i calcoli otteniamo un'identità, l'esercizio è svolto correttamente; non lo è in caso contrario.

Se $x = -\frac{1}{2}$, l'equazione

$$12x + 6 = 6x + 3$$

diventa

$$12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3$$

$$-6 + 6 = -3 + 3$$

$$0 = 0 \quad \text{Ok!}$$

Avendo raggiunto l'identità, possiamo affermare che l'esercizio è svolto correttamente.

Anche questa era molto facile. Ed in più alla fine c’era pure la verifica.

ESEMPIO 3

$$\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{x}{4}-\frac{1}{6}x=10$$

è un'equazione di primo grado a coefficienti fratti. Il nostro intento consiste nell'esprimerla in forma normale, pertanto calcoliamo il denominatore comune:

$$\frac{12x+16x+6x-4x}{24}=\frac{240}{24}$$

In virtù del secondo principio di equivalenza, possiamo cancellare il denominatore, ricavando l'equazione equivalente

$$30x=240$$

A questo punto possiamo dividere i due membri per 30

$$x=\frac{240}{30}$$

e ridurre la frazione ai minimi termini, ottenendo così la soluzione, vale a dire:

$$x=8$$

Qui la “difficoltà” stava solo nel fatto di dover manipolare dei coefficienti frazionari e non interi. Con il **m.c.m.** questo inconveniente viene eliminato.

ESEMPIO 4

$$\frac{4x}{3} - \frac{2x}{8} - x + 5 = 0$$

è un'equazione di primo grado a coefficienti fratti. Prima di procedere, osserviamo che possiamo semplificare 2 e 8 nella seconda frazione

$$\frac{4x}{3} - \frac{x}{4} - x + 5 = 0$$

Calcoliamo il minimo comune multiplo tra i denominatori

$$\frac{16x - 3x - 12x + 60}{12} = 0$$

Cancelliamo il denominatore

$$16x - 3x - 12x + 60 = 0$$

e trasportiamo il termine senza l'incognita al secondo membro, avendo l'accortezza di cambiarne il segno

$$16x - 3x - 12x = -60$$

Sommati i monomi simili al primo membro, scopriamo che la soluzione dell'equazione è:

$$x = -60$$

Qui avevamo un "misto" tra coefficienti frazionari ed interi. Anche qui con un semplice **m.c.m.** ce ne usciamo.

Andiamo un po' più al sodo:

ESEMPIO 5

Consideriamo l'equazione di primo grado a coefficienti interi

$$3(2-3x)+2(4x-1)-x-1=0$$

Il nostro compito consiste nell'esprimerla in forma normale eseguendo prima di tutto i prodotti, così da eliminare le]parentesi tonde

$$6-9x+8x-2-x-1=0$$

Sommiamo tra loro i monomi simili

$$-2x+3=0$$

trasportiamo a destra il termine senza incognita, cambiandone il segno

$$-2x=-3$$

Poiché il coefficiente dell'incognita è negativo, cambiamo i segni a destra e a sinistra

$$2x=3$$

e dividiamo i due membri per 2, ottenendo:

$$x=\frac{3}{2}$$

Essa è la soluzione dell'equazione.

Qui l'unico "intralcio era quello di svolgere le **moltiplicazioni** iniziali per eliminare le parentesi. Troppo facile vero?

ESEMPIO 6

Consideriamo l'equazione di primo grado

$$3x - 1 + 2(5 - x) - 2 = 4(x + 2) - 2x - 1$$

Eseguiamo le moltiplicazioni

$$3x - 1 + 10 - 2x - 2 = 4x + 8 - 2x - 1$$

e trasportiamo i termini con l'incognita al primo membro e quelli senza l'incognita al secondo, avendo premura di cambiare il segno ai monomi che attraversano il simbolo di uguaglianza.

$$3x - 2x - 4x + 2x = 1 - 10 + 2 - 1$$

A questo punto sommiamo tra loro i termini simili

$$-x = -8$$

e, cambiati i segni a destra e a sinistra, riportiamo la soluzione dell'equazione.

$$x = 8$$

Anche qui nulla di difficile. Due **moltiplicazioni** e niente più.

ESEMPIO 7

Consideriamo l'equazione di primo grado a coefficienti interi

$$8(4x+1)=15(3x+2)-16(x+1)$$

Svolgiamo i prodotti così da sbarazzarci delle parentesi tonde

$$32x+8=45x+30-16x-16$$

Portiamo i termini in x a sinistra dell'uguale e i termini senza la x a destra dell'uguale, cambiando il segno di ciascun termine che oltrepassa il simbolo di uguaglianza

$$32x-45x+16x=+30-16-8$$

Sommiamo tra loro i termini simili

$$3x=6$$

e infine dividiamo entrambi i membri per il coefficiente di x

$$x=\frac{6}{3} \quad \to \quad x=2$$

Notiamo che nell'ultimo passaggio abbiamo ridotto ai minimi termini la frazione $\frac{6}{3}$.

Qui le **moltiplicazioni** inizialmente da svolgere erano 3. Niente di che.

ESEMPIO 8

$2(5x-3+9x)-1-16x=10x-[2(x-2)-7(2x-3)]$

Procediamo dando la precedenza alle operazioni all'interno delle parentesi quadre, in particolare eseguiremo le moltiplicazioni, utilizzando opportunamente la regola dei segni

$2(5x-3+9x)-1-16x=10x-[2x-4-14x+21]$

Sommiamo tra loro i termini simili all'interno delle parentesi quadre

$2(5x-3+9x)-1-16x=10x-[-12x+17]$

A questo punto cambiamo i segni ai termini interni alle parentesi quadre, che cancelliamo perché hanno esaurito il loro compito

$2(5x-3+9x)-1-16x=10x+12x-17$

Occupiamoci delle parentesi tonde: sommiamo tra loro i termini simili

$2(14x-3)-1-16x=10x+12x-17$

e moltiplichiamo il binomio $14x-3$ per 2

$28x-6-1-16x=10x+12x-17$

Trasportiamo tutti i termini con la x a sinistra dell'uguale e quelli senza a destra, ricordando che i monomi che oltrepassano il simbolo di uguaglianza vanno cambiati di segno

$28x-16x-10x-12x=6+1-17$

Sommiamo i monomi simili così da ricavare l'equazione equivalente

$-10x=-10$

Cambiamo i segni e dividiamo per 10 i due membri

$10x=10$

$$x=\frac{10}{10}$$

da cui, una volta ridotta ai minimi termini la frazione, scopriamo che la soluzione è

$x=1$

Qual era la difficoltà aggiuntiva in questo esempio? **Le parentesi quadre**. Ma alle scuole medie avete imparato a svolgere prima il contenuto delle parentesi tonde e poi quello delle quadre. Un passaggio in più, insomma, ma nulla di più.

ESEMPIO 9

$5(3+3x)-4(x-3)+x=2[2(x-1)+12-(x-6)]$

è un'equazione di primo grado a coefficienti interi e per risolverla dobbiamo sbarazzarci delle parentesi. A tal proposito effettuiamo le moltiplicazioni tra i coefficienti numerici e i binomi presenti nelle parentesi tonde:

$15+15x-4x+12+x=2[2x-2+12-x+6]$

Eseguiamo la moltiplicazione tra 2 e il polinomio all'interno delle parentesi quadre

$15+15x-4x+12+x=4x-4+24-2x+12$

Trasportiamo tutti termini con l'incognita a sinistra e tutti quelli senza incognita a destra dell'uguale, cambiando i segni a quelli che oltrepassano il simbolo di uguaglianza

$15x-4x+x-4x+2x=-15-12-4+24+12$

Sommiamo tra loro i termini simili, vale a dire i termini che hanno la stessa parte letterale

$10x=5$

e dividiamo i due membri per il coefficiente di x

$$x=\frac{5}{10}$$

Non ci resta che ridurre la frazione ai minimi termini e scrivere la soluzione dell'equazione, ossia:

$$x=\frac{1}{2}$$

Un altro esempio con le **parentesi quadre**.

ESEMPIO 10

$12(x-1)+3=3\{2+[-(-3x-2)-2]\}$

occorre innanzitutto svolgere i calcoli: partiamo dal prodotto a sinistra dell'uguale

$12x-12+3=3\{2+[-(-3x-2)-2]\}$

A destra dell'uguale, svolgiamo invece le operazioni racchiuse tra le parentesi più interne

$12x-9=3\{2+[+3x+2-2]\}$

$12x-9=3\{2+3x\}$

Moltiplichiamo 3 per ciascun addendo nelle parentesi graffe

$12x-9=6+9x$

dopodiché trasportiamo tutti i termini con l'incognita x a sinistra e i termini noti a destra, cambiando i segni a tutti quelli che passano da un membro all'altro

$12x-9x=9+6$

$3x=15$

Isoliamo, infine, l'incognita al primo membro dividendo i due membri per 3

$\frac{3}{3}x=\frac{15}{3}$

Ridotte le frazioni ai minimi termini, otteniamo la soluzione dell'equazione

$x=5$

Qui c'erano pure le **parentesi graffe**. Un altro passaggio in più, ma niente di che.

ESEMPIO 11

$$9x+3\{[2(x-3)+x-(x-1)]-2\}=3[-(x-2)-3]$$

cominciamo a fare i conti all'interno delle parentesi quadre a sinistra e a destra dell'uguale.

$$9x+3\{[2x-6+x-x+1]-2\}=3[-x+2-3]$$

$$9x+3\{2x-5-2\}=3[-x-1]$$

Al primo membro sommiamo i termini nelle parentesi graffe, al secondo moltiplichiamo 3 per il binomio $-x-1$

$$9x+3\{2x-7\}=-3x-3$$

Sbarazziamoci, infine, delle parentesi moltiplicando 3 per $2x-7$

$$9x+6x-21=-3x-3$$

A questo punto, trasportiamo tutti i termini con l'incognita x al primo membro e tutti i termini noti al secondo, attenendoci alla regola del trasporto: dobbiamo cambiare i segni ai termini che passano da un membro all'altro.

$$9x+6x+3x=21-3$$

Sommati i monomi simili, l'equazione diventa

$$18x=18$$

Isoliamo l'incognita x al primo membro dividendo i due membri per 18

$$\frac{18}{18}x=\frac{18}{18}$$

e riduciamo le frazioni ai minimi termini, ottenendo così la soluzione dell'equazione

$$x=1$$

Un altro esempio con le **parentesi graffe**.

ESEMPIO 12

$$\frac{x-4}{3}-\frac{5-x}{4}=\frac{2x+1}{6}$$

calcoliamo prima di tutto il minimo comune multiplo tra tutti i denominatori

$$\frac{4(x-4)-3(5-x)}{12}=\frac{2(2x+1)}{12}$$

In virtù del secondo principio di equivalenza, possiamo moltiplicare a destra e a sinistra per 12 ricavando così l'equazione equivalente

$$4(x-4)-3(5-x)=2(2x+1)$$

Eseguiamo le moltiplicazioni applicando a dovere la regola dei segni:

$$4x-16-15+3x=4x+2$$

Siamo in dirittura di arrivo: dobbiamo trasportare tutti i termini con l'incognita a sinistra e quelli senza incognita a destra, ricordando di cambiare il segno a quei termini che passano da un membro a l'altro

$$4x+3x-4x=16+15+2$$

Sommiamo i termini simili

$$3x=33$$

isoliamo l'incognita dividendo i due membri per 3

$$x=\frac{33}{3}$$

e infine riduciamo ai minimi termini la frazione ottenuta

$$x=11$$

Caso un po' più articolato di **equazione a coefficienti fratti**. In questo caso dopo aver svolto il m.c.m. abbiamo "ritrovato" una semplice equazione di primo grado con le parentesi tonde, che abbiamo imparato a trattare.

ESEMPIO 13

$$(2x-3)^2-(4x-1)(x+2)=(3x-1)(3x+1)-9x^2$$

Anche se non sembra, l'equazione

$$(2x-3)^2-(4x-1)(x+2)=(3x-1)(3x+1)-9x^2$$

è effettivamente un'equazione di primo grado. Per avere conferma di ciò, dobbiamo prima di tutto esprimere l'equazione in forma normale, eseguendo tutte le operazioni e sommando in seguito i termini simili. Ricorreremo anche ai prodotti notevoli: ci faciliteranno di molto i calcoli da fare.

Dedichiamoci innanzitutto allo sviluppo del quadrato di binomio

$$4x^2-12x+9-(4x-1)(x+2)=(3x-1)(3x+1)-9x^2$$

in seguito ci occupiamo del prodotto da calcolare termine a termine che inseriremo tra parentesi tonde perché c'è un segno meno davanti al prodotto

$$4x^2-12x+9-(4x^2+8x-x-2)=(3x-1)(3x+1)-9x^2$$

Cambiamo segno a ciascuno dei termini

$$4x^2-12x+9-4x^2-8x+x+2=(3x-1)(3x+1)-9x^2$$

Infine, troviamo un prodotto che si può calcolare velocemente mediante la regola della differenza di quadrati.

$$4x^2-12x+9-4x^2-8x+x+2=9x^2-1-9x^2$$

Trasportiamo a questo punto tutti i termini con l'incognita al primo membro, e quelli senza incognita al secondo membro, ricordando di cambiare i segni ai monomi che oltrepassano il simbolo di uguaglianza.

$$4x^2-12x-4x^2-8x+x-9x^2+9x^2=-9-2-1$$

Una volta sommati i termini simili, ricaviamo l'equazione equivalente

$$-19x=-12$$

Cambiamo i segni dei due membri

$$19x=12$$

e isoliamo in seguito l'incognita, dividendo i due membri per 19

$$x=\frac{12}{19}$$

Cosa abbiamo incontrato in questo esercizio? Intanto abbiamo:

a) Svolto il quadrato di binomio $(2x-3)^2$, sviluppato in $4x^2-12x+9$

b) Svolta la somma per differenza $(3x-1)(3x+1)$ e sviluppata in $9x^2-1$

c) Eseguiti gli altri prodotti presenti per togliere le restanti parentesi

d) Constatato che comparivano dei termini in x^2

e) Pensato che era il caso di preoccuparsi in quanto non siamo ancora in grado di risolvere un'equazione di 2° grado (in cui compare la x^2

f) Tirato un sospiro di sollievo quando ci siamo accorti che i termini $+4x^2$ e $-4x^2$ si annullavano a vicenda, così come i termini $-9x^2$ e $+9x^2$.

Alla fine abbiamo dovuto risolvere una semplice **equazione di 1° grado "camuffata" inizialmente da equazione di 2° grado**.

ESEMPIO 14

$$\frac{1}{10}(x+2)(x-2)-\frac{(3x-2)}{10}=\frac{(x-3)^2}{10}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}$$

Per prima cosa, portiamo tutte le frazioni a denominatore comune, calcolando essenzialmente il minimo comune multiplo tra tutti i denominatori presenti:

$$\frac{(x+2)(x-2)-(3x-2)}{10}=\frac{(x-3)^2+5x-2}{10}$$

Il secondo principio di equivalenza garantisce che se moltiplichiamo per 10 a destra e a sinistra dell'uguale otterremo l'equazione equivalente a quella data

$$(x+2)(x-2)-(3x-2)=(x-3)^2+5x-2$$

A questo punto possiamo effettuare le operazioni, avvalendoci degli opportuni prodotti notevoli.

Cominciamo dal prodotto tra la somma e differenza dei monomi x e 2 e cambiamo i segni ai termini all'interno delle parentesi tonde al primo membro

$$x^2-4-3x+2=(x-3)^2+5x-2$$

Sviluppiamo il quadrato di binomio a destra dell'uguale

$$x^2-4-3x+2=x^2-6x+9+5x-2$$

e cancelliamo x^2 osservando semplicemente che sono termini uguali in membri diversi

$$-4-3x+2=-6x+9+5x-2$$

Trasportiamo ora tutti i termini con l'incognita al primo membro e quelli senza incognita al secondo, ricordando di cambiare i segni ai monomi che oltrepassano il simbolo di uguaglianza

$$-3x+6x-5x=4-2+9-2$$

Sommiamo i termini simili

$$-2x=9$$

Sommiamo i termini simili

$$-2x = 9$$

cambiamo i segni ai membri

$$2x = -9$$

e dividiamo per due

$$x = -\frac{9}{2}$$

Altro esempio di **equazione di 1° grado "camuffata" inizialmente da equazione di 2° grado,** con qualche **prodotto notevole** da svolgere.

ESEMPIO 15

$$\frac{1}{2}\left[\frac{x+3}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{x-2}{2}\right]+\frac{1}{4}x=\frac{x-2}{4}-\left(x-\frac{x-3}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}$$

la prima cosa da fare consiste nello svolgere le operazioni che stanno nelle parentesi tonde:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{x+3}{2}-\frac{2x-1}{2}+\frac{x-2}{2}\right]+\frac{1}{4}x=\frac{x-2}{4}-\left(\frac{2x-(x-3)}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}$$

Cambiamo i segni nelle parentesi al secondo membro e in seguito sommiamo i termini simili

$$\frac{1}{2}\left[\frac{x+3}{2}-\frac{2x-1}{2}+\frac{x-2}{2}\right]+\frac{1}{4}x=\frac{x-2}{4}-\left(\frac{2x-x+3}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{x+3}{2}-\frac{2x-1}{2}+\frac{x-2}{2}\right]+\frac{1}{4}x=\frac{x-2}{4}-\frac{x+3}{2}\cdot\frac{3}{4}$$

Portiamo a denominatore comune le frazioni nelle parentesi quadre:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{x+3-(2x-1)+x-2}{2}\right]+\frac{1}{4}x=\frac{x-2}{4}-\frac{x+3}{2}\cdot\frac{3}{4}$$

da cui

$$\frac{1}{2}\left[\frac{x+3-2x+1+x-2}{2}\right]+\frac{1}{4}x=\frac{x-2}{4}-\frac{x+3}{2}\cdot\frac{3}{4}$$

Sommiamo i termini simili

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2}{2}\right]+\frac{1}{4}x=\frac{x-2}{4}-\frac{x+3}{2}\cdot\frac{3}{4}$$

e riduciamo ai minimi termini la frazione $\frac{2}{2}$

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}x=\frac{x-2}{4}-\frac{x+3}{2}\cdot\frac{3}{4}$$

Adesso effettuiamo i prodotti sia al primo che al secondo membro

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x=\frac{x-2}{4}-\frac{3(x+3)}{8}$$

e una volta sviluppati i conti, ricaviamo

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x=\frac{x-2}{4}-\frac{3x+9}{8}$$

Ora determiniamo il minimo comune multiplo tra 2, 4 e 8 che è ovviamente 8 e portiamo le frazioni a denominatore comune:

$$\frac{4+2x}{8}=\frac{2(x-2)-(3x+9)}{8}$$

Cancelliamo i denominatori e scriviamo l'equazione equivalente

$$4+2x=2(x-2)-(3x+9)$$

Eseguiamo le moltiplicazioni rimaste

$$4+2x=2x-4-3x-9$$

Portiamo al primo membro tutti i termini con l'incognita x, al secondo tutto quelli senza, prestando la massima attenzione ai segni.

$$2x-2x+3x=-4-4-9$$

Sommiamo i termini simili

$$3x = -17$$

e isoliamo l'incognita dividendo i due membri per 3

$$x = -\frac{17}{3}$$

Niente di nuovo, ma abbastanza articolato.

ESEMPIO 16

$$\frac{\frac{x+1}{2}-1}{\frac{3}{4}-1}=\frac{\frac{5x-2}{3}-1}{\frac{4}{3}+1}$$

Per prima cosa eseguiamo i calcoli ai numeratori principali delle due frazione calcolando i denominatori comuni

$$\frac{\frac{x+1-2}{2}}{\frac{3}{4}-1}=\frac{\frac{5x-2-3}{3}}{\frac{4}{3}+1}$$

Sommati i termini simili ricaviamo

$$\frac{\frac{x-1}{2}}{\frac{3}{4}-1}=\frac{\frac{5x-5}{3}}{\frac{4}{3}+1}$$

Ora dedichiamoci ai denominatori principali sommando tra loro le frazioni,

$$\frac{\frac{x-1}{2}}{\frac{3-4}{4}}=\frac{\frac{5x-5}{3}}{\frac{4+3}{3}}$$

$$\frac{\frac{x-1}{2}}{-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{5x-5}{3}}{\frac{7}{3}}$$

Possiamo esprimere entrambe le frazioni di frazioni in forma normale, moltiplicando i numeratori principale per le frazioni reciproche che si trovano a denominatore

$$\frac{x-1}{2}\cdot(-4)=\frac{5x-5}{3}\cdot\frac{3}{7}$$

Semplifichiamo in croce le frazioni ed eseguiamo i prodotti usando a dovere la regola dei segni

$$-2(x-1)=\frac{5x-5}{7}$$

A questo punto interviene il secondo principio di equivalenza delle equazioni, il quale garantisce che moltiplicando a destra e a sinistra per 7 otteniamo un'equazione equivalente:

$$7 \cdot (-2)(x-1) = \frac{5x-5}{7} \cdot 7$$

Questa operazione non cambia l'insieme soluzione ma permette di semplificare il denominatore

$$-14(x-1) = 5x-5$$

Eseguiamo i semplici calcoli rimasti

$$-14x + 14 = 5x - 5$$

e trasportiamo i termini con l'incognita al primo membro, mentre quelli senza incognita al secondo. Ricordiamoci di cambiare i segni a quei termini che attraversano il simbolo di uguale

$$-14x - 5x = -14 - 5$$

$$-19x = -19$$

Cambiamo segni a destra e a sinistra e infine isoliamo l'incognita al primo membro dividendo per 19

$$19x = 19 \quad \rightarrow \quad x = \frac{19}{19}$$

Riduciamo la frazione ai minimi termini

$$x = 1$$

Caso di equazione con **frazioni di frazioni** come coefficienti

ESEMPIO 17

(raccoglimento totale)

$$4x^4 - 9x^2 = 0$$

In questo caso abbiamo delle x^4 e x^2 che, naturalmente non si possono eliminare a vicenda come nei casi precedenti ($4x^4$ e $- 9x^2$ dovrebbero essere monomi opposti. Ma non lo sono). E allora? Come procediamo? Osserviamo l'equazione partendo da un atto di fede nei confronti del vostro prof. Che vi vuole bene e che quindi non si sognerebbe mai di darvi un'equazione di 4° grado quando finora avete trattato solo quelle di 1° grado. Dunque osserviamo l'equazione……

Essa è costituita da due monomi, appunto $4x^4$ e $-9x^2$, in cui in entrambi compare la x. Diciamo che sono "imparentati". Non sono "fratelli" (cioè simili da poterli sommare algebricamente e neanche opposti da poterli eliminare). Diciamo che sono "cugini" "grazie" alla alla x. Nel primo monomio questa compare elevata a 4. Nel secondo elevata a 2. Diciamo che x^2 è divisore per x^4 e che quindi esso si può "raccogliere" come fattore comune tra i due monomi. Riscriviamo l'equazione in maniera "smembrata":

$$4x^4 - 9x^2 = \boxed{2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} - \boxed{9 \cdot x \cdot x}$$

E vi chiedo: tra i due riquadri, **rosso** e **verde**, quali **"fattori" comuni** intravedete? Evidenziamoli:

$$4x^4 - 9x^2 = 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot \boxed{x \cdot x} - 9 \cdot \boxed{x \cdot x}$$

e quali **non comuni**? Evidenziamo anche questi:

$$4x^4 - 9x^2 = \boxed{2 \cdot 2 \cdot x \cdot x} \cdot x \cdot x - \boxed{9} \cdot x \cdot x$$

In questo caso allora, **“raccogliendo a fattor comune”** si avrà:

$$4x^4 - 9x^2 = x \cdot x \,(2 \cdot 2 \cdot x \cdot x – 9) = x^2 \,(4x^2 – 9)$$

Dunque abbiamo “spezzato” l’equazione iniziale nel prodotto fra il monomio x^2 ed il binomio $(4x^2 – 9)$. Ma chi è il binomio $(4x^2 – 9)$? Sembra proprio (anzi lo è) una differenza fra due quadrati. Si, proprio quella che avevamo incontrato nello studio dei prodotti notevoli. Non ricordate?

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

E, nel nostro caso:

$$(2x + 3)\,(2x - 3) = 4x^2 - 9$$

Per risolvere l’equazione, in questo caso ci viene richiesta una piccola abilità aggiuntiva: non più svolgere il prodotto somma per differenza ricavando la differenza fra i due quadrati, ma “tornare indietro”, ricavando il prodotto somma per differenza a partire dalla differenza fra i due quadrati. Vi siete incartati? La pratica degli esercizi vi risolverà il problema. Alla fine potremo scrivere:

$$4x^4 - 9x^2 = x^2 \,(4x^2 – 9) = x^2 \,(2x + 3)\,(2x - 3)$$

E notiamo come i tre fattori ricavati $x^2 \,(2x + 3)\,(2x - 3)$ non sono ulteriormente riducibili (al massimo potremmo scrivere che $x^2 = x \cdot x$, ma non sarebbe una cosa molto intelligente). Allora l’equazione iniziale può essere così scritta:

$$x^2 \,(2x + 3)\,(2x - 3) = 0$$

Abbiamo dunque spezzato l'equazione di 4° grado iniziale nel prodotto fra più fattori di grado minore. È come se avessimo scomposto un numero non primo in un prodotto fra fattori primi (es. $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$). Quindi? Ricordate quando abbiamo parlato di "**Legge di annullamento del prodotto**"?

"se il prodotto fra due, tre, quattro,....,cento fattori dà come risultato zero, allora una cosa è certa: almeno uno di questi numeri deve essere zero".

Cioè nel nostro caso, affinché l'equazione

$$x^2\,(2x + 3)\,(2x - 3) = 0$$

sia soddisfatta (cioè il suo risultato dia veramente zero), dovrà accadere che:

$$x^2 = 0$$

oppure $(2x + 3) = 0$

oppure $(2x - 3) = 0$

a questo punto basterà risolvere separatamente le tre equazioni sopra scritte:

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = +3 \Rightarrow x = +\frac{3}{2}$$

Dunque le soluzioni possibili per l'equazione iniziale sono queste tre.

Cosa abbiamo fatto in questo esercizio?

- ✓ Abbiamo constatato di avere a che fare con una equazione di 4° grado ma non ci siamo scoraggiati. Doveva esserci per forza il "trucchetto";

- ✓ Raccogliendo a fattor comune (totale) la x^2 e riconoscendo un prodotto notevole (somma per differenza), abbiamo scomposto l'equazione di 4° grado iniziale in un prodotto di più fattori **irriducibili** di grado inferiore;
- ✓ Applicando la legge di annullamento del prodotto, abbiamo risolto tre equazioni semplici.

ESEMPIO 18

(raccoglimento totale)

$$\mathbf{4x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0}$$

Qui non riusciamo ad individuare una "parentela" comune per tutti i quattro termini dell'equazione data. Però, osservate bene. Se li consideriamo a due a due, qualcosa esce fuori. Ad es., cosa notate di "comune" fra i primi due?

$$\boxed{4x^3 - 4x^2} - x + 1 = 0$$

come visto nell'esercizio precedente, si potrebbe "raccogliere", fra i due monomi nel riquadro **rosso**, il monomio comune col minore esponente, $\mathbf{4x^2}$ (che poi altro non è che il MCD fra i due monomi). Cosa rimarrebbe? Eseguiamo in maniera più spedita rispetto a quanto visto prima:

$$4x^3 - 4x^2 = 4x^2\,(x - 1)$$

e riscriviamo l'equazione in questa maniera

$$4x^2\,(x - 1) - x + 1 = 0$$

Ancora non vi dice niente?
Riscriviamo l'equazione in maniera più "tattica":

$$4x^2\,(x - 1) - (x - 1) = 0$$

Abbiamo in pratica, con il 3° e 4° termine, "raccolto" il "-" e creato la parentesi. D'altra parte della regolarità del passaggio ve ne accorgete subito se osservate che:

$$- (x -1) = - x + 1$$

è un passaggio che conosciamo bene (quando abbiamo un "-" davanti ad una parentesi con all'interno una somma algebrica, basterà eliminare le parentesi cambiando di segno tutto il loro contenuto). Dunque dobbiamo avere a che fare con l'equazione (quella iniziale scordiamocela pure):

$$4x^2 (x -1) - (x -1) = 0$$

Notate ulteriori "parentele"? Beh, direi che il termine $(x-1)$ compare troppe volte per non "indurci al sospetto". Effettivamente un fattore comune si può individuare, ed è proprio $(x-1)$:

$$4x^2 \boxed{(x -1)} - \boxed{(x -1)} = 0$$

e raccogliendo nuovamente si avrà:

$$\boxed{(x -1)} \boxed{(4x^2 - 1)} = 0$$

In cui notiamo come il secondo fattore può ulteriormente essere scomposto in quanto si tratta nuovamente di una differenza di quadrati tramutabile in una somma per una differenza:

$$\boxed{(x -1)} \boxed{(2x + 1) (2x - 1)} = 0$$

Abbiamo di nuovo trasformato l'equazione iniziale (antipatica alla vista) in una molto più "simpatica" che possiamo risolvere ancora con la legge di annullamento del prodotto:

"se il prodotto fra due, tre, quattro,….,cento fattori dà come risultato zero, allora una cosa è certa: almeno uno di questi numeri deve essere zero".

Si dovrà avere allora:

$$(x - 1) = 0 \Rightarrow x = +1$$

$$\text{oppure } (2x + 1) = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{oppure } (2x - 1) = 0 \Rightarrow 2x = +1 \Rightarrow x = +\frac{1}{2}$$

Dunque le soluzioni possibili per l'equazione iniziale sono queste tre:

$$x = +1, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad x = +\frac{1}{2}$$

Provate a sostituire ad uno ad uno questi tre valori alla x nell'equazione iniziale

$$\mathbf{4x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0}$$

e vedrete che "tutto torna"

Cosa abbiamo fatto in questo esercizio?

- ✓ Abbiamo constatato di avere a che fare con una equazione di 3° grado ma non ci siamo scoraggiati. Doveva esserci per forza il "trucchetto";
- ✓ Raccogliendo $4x^2$ a fattor comune (parziale) fra i primi due termini, raccogliendo nuovamente a fattor comune (stavolta totale) il binomio (x-1) e riconoscendo un prodotto notevole (somma per differenza), abbiamo scomposto l'equazione di 3° grado iniziale in un prodotto di più fattori **irriducibili** di grado inferiore;
- ✓ Applicando la legge di annullamento del prodotto, abbiamo risolto tre equazioni semplici.

N.B.: abbiamo parlato sia di raccoglimento totale che parziale. Ma che differenza c'è? Volete approfondire questi concetti. Vi invito a consultare la dispensa sui **raccoglimenti**.

Risolvi le seguenti equazioni di primo grado in una incognita ed esegui la verifica
di Andrea Simoncelli

E. 1

$x+9=15$

$x=15-9$

$x=6$

Verifica

Primo membro

$6+9=$

$=15$

Secondo membro:

15

E. 2

$2x+8=12$

$2x=12-8$

$2x=4$

$x=\frac{4}{2}=2$

Verifica

Primo membro

$2\cdot 2+8=$

$=4+8=$

$=12$

Secondo membro:

12

E. 3

$7x-9=2x+1$

$7x-2x=1+9$

$5x=10$

$x=\frac{10}{5}=2$

Verifica

Primo membro:

$7\cdot 2-9=$

$=14-9=$

$=5$

Secondo membro:

$2\cdot 2+1=$

$=4+1=$

$=5$

E. 4

$-2x+3=x-6$

$-2x-x=-6-3$

$-3x=-9$

$3x=9$

$x=\frac{9}{3}=3$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$-2\cdot 3+3=$

$=-6+3=$

$=-3$

Secondo membro:

$3-6=$

$=-3$

E. 5

$3(x+2)-2(x-3)=4-x$

$3x+6-2x+6=4-x$

$x+12=4-x$

$x+x=4-12$

$2x=-8$

$x=-\frac{8}{2}=-4$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$3\cdot(-4+2)-2\cdot(-4-3)=$

$=3\cdot(-2)-2\cdot(-7)=$

$=-6+14=$

$=8$

Secondo membro:

$4-(-4)=$

$=4+4=$

$=8$

E. 6

$3(x+1)-5x=x-15$

$3x+3-5x=x-15$

$-2x+3=x-15$

$-2x-x=-15-3$

$-3x=-18$

$3x=18$

$x=\frac{18}{3}=6$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$3\cdot(6+1)-5\cdot 6=$

$=3\cdot 7-30=$

$=21-30=$

$=-9$

Secondo membro:

$6-15=$

$=-9$

E. 7

$6(x+2)-9(x-1)=-2(3x+3)+3$

$6x+12-9x+9=-6x-6+3$

$-3x+21=-6x-3$

$-3x+6x=-3-21$

$3x=-24$

$x=-\frac{24}{3}=-8$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$6\cdot(-8+2)-9\cdot(-8-1)=$

$=6\cdot(-6)-9\cdot(-9)=$

$=-36+81=$

$=45$

Secondo membro:

$-2\cdot[3\cdot(-8)+3]+3=$

$=-2\cdot[-24+3]+3=$

$=-2\cdot[-21]+3=$

$=42+3=$

$=45$

E. 8

$5(x+1) = 2(x+7)$

$5x+5=2x+14$

$5x-2x=14-5$

$3x=9$

$x=\frac{9}{3}=3$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$5\cdot(3+1)=$

$=5\cdot 4=$

$=20$

Secondo membro:

$2\cdot(3+7)=$

$=2\cdot 10=$

$=20$

E. 9

$10(x+1) = 4(x+7)+6$

$10x+10=4x+28+6$

$10x+10=4x+34$

$10x-4x=34-10$

$6x=24$

$x=\frac{24}{6}=4$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$10\cdot(4+1)=$

$=10\cdot 5=$

$=50$

Secondo membro:

$4\cdot(4+7)+6=$

$=4\cdot 11+6=$

$=44+6=$

$=50$

E. 10

$$4(x+2) = 2x+20$$

$$4x+8=2x+20$$

$$4x-2x=20-8$$

$$2x=12$$

$$x=\frac{12}{2}=6$$

Verifica

Primo membro:

$$4\cdot(6+2)=$$

$$=4\cdot 8=$$

$$=32$$

Secondo membro:

$$2\cdot 6+20=$$

$$=12+20=$$

$$=32$$

E. 11

$$3(4x-5)-5(2x-1)=5x-16$$

$$12x-15-10x+5=5x-16$$

$$2x-10=5x-16$$

$$2x-5x=-16+10$$

$$-3x=-6$$

$$3x=6$$

$$x=\frac{6}{3}=2$$

Verifica

Primo membro:

$$3\cdot(4\cdot 2-5)-5\cdot(2\cdot 2-1)=$$

$$=3\cdot(8-5)-5\cdot(4-1)=$$

$$=3\cdot 3-5\cdot 3=$$

$$=9-15=$$

$$=-6$$

Secondo membro:

$$5\cdot 2-16=$$

$$=10-16=$$

$$=-6$$

E. 12

$11x-8=7(x-1)+x$

$11x-8=7x-7+x$

$11x-8=8x-7$

$11x-8x=-7+8$

$3x=1$

$x=\frac{1}{3}$

Verifica

Primo membro:

$11\cdot\frac{1}{3}-8$

$\frac{11}{3}-8$

$\frac{11-24}{3}$

$-\frac{13}{3}$

Secondo membro:

$7\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)+\frac{1}{3}=$

$=7\cdot\left(\frac{1-3}{3}\right)+\frac{1}{3}=$

$=7\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}=$

$=-\frac{14}{3}+\frac{1}{3}=$

$=-\frac{13}{3}$

E. 13

$5(x+3)=9-7x$

$5x+15=9-7x$

$5x+7x=9-15$

$12x=-6$

$x=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}$

Verifica

Primo membro:

$5\cdot\left(-\frac{1}{2}+3\right)=$

$5\cdot\left(\frac{-1+6}{2}\right)=$

$=5\cdot\frac{5}{2}=$

$=\frac{25}{2}$

Secondo membro:

$9-7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=$

$=9+\frac{7}{2}=$

$=\frac{18+7}{2}=$

$=\frac{25}{2}$

E. 14

$12(x-2)+4(x-3)=2x-8$

$12x-24+4x-12=2x-8$

$16x-36=2x-8$

$16x-2x=-8+36$

$14x=28$

$x=\frac{28}{14}=2$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$12\cdot(2-2)+4\cdot(2-3)=$

$=12\cdot 0+4\cdot(-1)=$

$=0-4=$

$=-4$

Secondo membro:

$2\cdot 2-8=$

$=4-8=$

$=-4$

E. 15

$4(x-6)-2(x-5)=4x+3(2+6x)$

$4x-24-2x+10=4x+6+18x$

$2x-14=22x+6$

$2x-22x=6+14$

$-20x=20$

$20x=-20$

$x=-\frac{20}{20}=-1$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$4\cdot(-1-6)-2\cdot(-1-5)=$

$=4\cdot(-7)-2\cdot(-6)=$

$=-28+12=$

$=-16$

Secondo membro:

$4\cdot(-1)+3\cdot[2+6\cdot(-1)]=$

$=-4+3\cdot[2-6]=$

$=-4+3\cdot[-4]=$

$=-4-12=$

$=-16$

E. 16

$$4x-\{2x-1-[6+2x-(3x-1)]\}=0$$
$$4x-\{2x-1-[6+2x-3x+1]\}=0$$
$$4x-\{2x-1-[7-x]\}=0$$
$$4x-\{2x-1-7+x\}=0$$
$$4x-\{3x-8\}=0$$
$$4x-3x+8=0$$
$$x+8=0$$
$$x=-8$$

Verifica

Primo membro:

$$4\cdot(-8)-\{2\cdot(-8)-1-[6+2\cdot(-8)-(3\cdot(-8)-1)]\}=$$
$$=-32-\{-16-1-[6-16-(-24-1)]\}=$$
$$=-32-\{-16-1-[6-16-(-25)]\}=$$
$$=-32-\{-16-1-[6-16+25]\}=$$
$$=-32-\{-16-1-[-10+25]\}=$$
$$=-32-\{-16-1-15\}=$$
$$=-32-\{-17-15\}=$$
$$=-32-\{-32\}=$$
$$=-32+32=$$
$$=0$$

Secondo membro:

$$0$$

E. 17

$$\frac{x+6}{8}-\frac{(x-2)}{12}-\frac{(4-x)}{24}=\frac{5}{12}+\frac{x-4}{4}$$

$$24\cdot\frac{3(x+6)-2(x-2)-(4-x)}{24}=\frac{10+6(x-4)}{24}\cdot 24$$

$$3x+18-2x+4-4+x=10+6x-24$$

$$2x+18=6x-14$$

$$2x-6x=-14-18$$

$$-4x=-32$$

$$4x=32$$

$$x=\frac{32}{4}=8$$

Verifica

Primo membro:

$$\frac{8+6}{8}-\frac{8-2}{12}-\frac{4-8}{24}=$$

$$=\frac{14}{8}-\frac{6}{12}+\frac{4}{24}=$$

$$=\frac{7}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=$$

$$=\frac{21-6+2}{12}=$$

$$=\frac{17}{12}$$

Secondo membro:

$$\frac{5}{12}+\frac{8-4}{4}=$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{4}{4}=$$

$$=\frac{5}{12}+1=$$

$$=\frac{5+12}{12}=$$

$$=\frac{17}{12}$$

E. 18

$$\frac{2}{3}x+2=x-\frac{3}{4}$$

$$12\cdot\frac{8x+24}{12}=\frac{12x-9}{12}\cdot 12$$

$$8x+24=12x-9$$

$$8x-12x=-9-24$$

$$-4x=-33$$

$$4x=33$$

$$x=\frac{33}{4}$$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{33}{4}+2=$$

$$=\frac{11}{2}+2=$$

$$=\frac{11+4}{2}=$$

$$=\frac{15}{2}$$

Secondo membro:

$$\frac{33}{4}-\frac{3}{4}=$$

$$=\frac{33-3}{4}=$$

$$=\frac{30}{4}=$$

$$=\frac{15}{2}$$

E. 19

$$3x+\frac{1}{2}=\frac{4}{7}$$

$$14\cdot\frac{42x+7}{14}=\frac{8}{14}\cdot 14$$

$$42x+7=8$$

$$42x=8-7$$

$$42x=1$$

$$x=\frac{1}{42}$$

<u>Verifica</u>

Primo membro

$$3\cdot\frac{1}{42}+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{14}+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1+7}{14}=$$

$$=\frac{8}{14}=$$

$$=\frac{4}{7}$$

Secondo membro:

$$\frac{4}{7}$$

E. 20

$$\frac{x}{3}-1=\frac{x}{6}-\frac{1}{2}$$

$$6\cdot\frac{2x-6}{6}=\frac{x-3}{6}\cdot 6$$

$$2x-6=x-3$$

$$2x-x=-3+6$$

$$x=3$$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$$\frac{3}{3}-1=$$

$$=1-1=$$

$$=0$$

Secondo membro:

$$\frac{3}{6}-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=$$

$$=0$$

E. 21

$$\frac{x+3}{4}+\frac{2x-2}{3}=\frac{1}{12}$$

$$12\cdot\frac{3(x+3)+4(2x-2)}{12}=\frac{1}{12}\cdot 12$$

$$3x+9+8x-8=1$$

$$11x+1=1$$

$$11x=1-1$$

$$11x=0$$

$$x=\frac{0}{11}=0$$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=$$

$$=\frac{9-8}{12}=$$

$$=\frac{1}{12}$$

Secondo membro:

$$\frac{1}{12}$$

E. 22

$1-\frac{x}{2}=\frac{x}{3}-x+\frac{4}{3}$

$6\cdot\frac{6-3x}{6}=\frac{2x-6x+8}{6}\cdot 6$

$6-3x=2x-6x+8$

$6-3x=-4x+8$

$-3x+4x=8-6$

$x=2$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$1-\frac{2}{2}=$

$=1-1=$

$=0$

Secondo membro

$\frac{2}{3}-2+\frac{4}{3}=$

$=\frac{2-6+4}{3}=$

$=0$

E. 23

$\frac{5}{2}x+5=3x-\frac{3}{2}x-5$

$2\cdot\frac{5x+10}{2}=\frac{6x-3x-10}{2}\cdot 2$

$5x+10=6x-3x-10$

$5x+10=3x-10$

$5x-3x=-10-10$

$2x=-20$

$x=-\frac{20}{2}=-10$

<u>Verifica</u>

Primo membro

$\frac{5}{2}\cdot(-10)+5=$

$=-25+5=$

$=-20$

Secondo membro

$3\cdot(-10)-\frac{3}{2}\cdot(-10)-5=$

$=-30+15-5=$

$=-15-5=$

$=-20$

E. 24

$$\frac{5}{4}x-\frac{8}{3}=\frac{2x-5}{3}+\frac{3}{4}$$

$$12\cdot\frac{15x-32}{12}=\frac{4(2x-5)+9}{12}\cdot 12$$

$$15x-32=8x-20+9$$

$$15x-32=8x-11$$

$$15x-8x=-11+32$$

$$7x=21$$

$$x=\frac{21}{7}$$

<u>Verifica</u>

Primo membro

$$\frac{5}{4}\cdot 3-\frac{8}{3}=$$

$$=\frac{15}{4}-\frac{8}{3}=$$

$$=\frac{45-32}{12}=$$

$$=\frac{13}{12}$$

Secondo membro

$$\frac{(2\cdot 3-5)}{3}+\frac{3}{4}=$$

$$=\frac{(6-5)}{3}+\frac{3}{4}=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=$$

$$=\frac{4+9}{12}=$$

$$=\frac{13}{12}$$

E. 25

$$\frac{2(2x-24)}{3}+1+\frac{7x+14}{5}=-(2x-2)$$

$$\frac{4x-48}{3}+1+\frac{7x+14}{5}=2-2x$$

$$15\cdot\frac{5(4x-48)+15+3(7x+14)}{15}=\frac{15(2-2x)}{15}\cdot 15$$

$$20x-240+15+21x+42=30-30x$$

$$41x-183=30-30x$$

$$41x+30x=30+183$$

$$71x=213$$

$$x=\frac{213}{71}=3$$

Verifica

Primo membro

$$\frac{2\cdot(2\cdot 3-24)}{3}+1+\frac{7\cdot(3+2)}{5}=$$

$$=\frac{2\cdot(6-24)}{3}+1+\frac{7\cdot 5}{5}=$$

$$=\frac{2\cdot(-18)}{3}+1+7=$$

$$=-12+8=$$

$$=-4$$

Secondo membro

$$-(2\cdot 3-2)=$$

$$=-(6-2)=$$

$$=-4$$

Stabilisci quali equazioni sono indeterminate e quali sono impossibili

E. 26

$3(x+1)-2x=x-1$

$3x+3-2x=x-1$

$x+3=x-1$ Equazione impossibile

$x-x=-1-3$

$0x=-4$

E. 27

$5x+4=3(x-2)+2x$

$5x+4=3x-6+2x$

$5x+4=5x-6$ Equazione impossibile

$5x-5x=-6-4$

$0x=-10$

E. 28

$2(x-3)-5=2x-11$

$2x-6-5=2x-11$

$2x-11=2x-11$ Equazione indeterminata

$2x-2x=-11+11$

$0x=0$

E. 29

$2(x-4)+3x-9=5x-17$

$2x-8+3x-9=5x-17$

$5x-17=5x-17$ Equazione indeterminata

$5x-5x=-17+17$

$0x=0$

E. 30

$12(x-3)+8x=10(2x+5)$

$12x-36+8x=20x+50$

$20x-36=20x+50$ Equazione impossibile

$20x-20x=50+36$

$0x=86$

E. 31

$5(2x+3)=10+5(2x+1)$

$10x+15=10+10x+5$

$10x+15=15+10x$ Equazione indeterminata

$10x-10x=15-15$

$0x=0$

E. 32

$-7(x+1)=2-3x-4x$

$-7x-7=2-7x$

$-7x+7x=2+7$

$0x=9$

Equazione impossibile

E. 33

$5(x+2)=2x+3(x+1)$

$5x+10=2x+3x+3$

$5x+10=5x+3$

$5x-5x=3-10$

$0x=-7$

Equazione impossibile

E. 34

$7x+2(x+1)-4x=3x+2x+2$

$7x+2x+2-4x=5x+2$

$5x+2=5x+2$

$5x-5x=2-2$

$0x=0$

Equazione indeterminata

E. 35

$10x-10+5x=-20+15x$

$15x-10=-20+15x$

$15x-15x=-20+10$

$0x=-10$

Equazione impossibile

E. 36

$2\left(2x+\frac{1}{2}x\right)+3=3+5x$

$4x+x+3=3+5x$

$5x+3=3+5x$

$5x-5x=3-3$

$0x=0$

Equazione indeterminata

E. 37

$2(x+3)-6(x+2)=5(3+x)-9x$

$2x+6-6x-12=15+5x-9x$

$-4x-6=-4x+15$

$-4x+4x=15+6$

$0x=21$

Equazione impossibile

E. 38

$3(x+9)+2(3-x)=x-7$

$3x+27+6-2x=x-7$

$x+33=x-7$ Equazione impossibile

$x-x=-7-33$

$0x=-40$

E. 39

$9x-2(x+3)-2=5x+2x-8$

$9x-2x-6-2=7x-8$

$7x-8=7x-8$ Equazione indeterminata

$7x-7x=-8+8$

$0x=0$

E. 40

$3(2x-3)-7x=3(2+x)-2(2x-10)$

$6x-9-7x=6+3x-4x+20$

$-x-9=-x+26$ Equazione impossibile

$-x+x=26+9$

$0x=35$

Risolvi i seguenti problemi dopo aver impostato un'equazione di primo grado in una incognita

E. 41

Se da un numero si sottrae 9 si ottiene 12. Determina il numero.

$$x-9=12$$

$$x=12+9$$

$$x=21$$

E. 42

Un numero è tale che il suo doppio aumentato di 2 è uguale al suo triplo diminuito di 3. Determina il numero.

$$2x+2=3x-3$$

$$2x-3x=-3-2$$

$$-x=-5$$

$$x=5$$

E. 43

Un numero è tale che, addizionato alla sua metà e alla sua terza parte, dà come risultato 33. Determina il numero.

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=33$$

$$6\cdot\frac{6x+3x+2x}{6}=\frac{198}{6}\cdot 6$$

$$11x=198$$

$$x=\frac{198}{11}=18$$

E. 44

Un numero è tale che la sua metà aumentata della sua terza parte è uguale al numero stesso diminuito di 3. Determina il numero.

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=x-3$$

$$6\cdot\frac{3x+2x}{6}=\frac{6x-18}{6}\cdot 6$$

$$5x=6x-18$$

$$5x-6x=-18$$

$$-x=-18$$

$$x=18$$

E. 45

Un numero è tale che la somma della sua metà e della sua terza parte è uguale a 20. Determina il numero.

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=20$$

$$6\cdot\frac{3x+2x}{6}=\frac{120}{6}\cdot 6$$

$$5x=120$$

$$x=\frac{120}{5}=24$$

E. 46

Il triplo di un numero diminuito di 8 è uguale al numero stesso. Determina il numero.

$$3x-8=x$$

$$3x-x=8$$

$$2x=8$$

$$x=\frac{8}{2}=4$$

E. 47

Addizionando a un numero la sua metà, la sua terza parte la sua quarta parte si ottiene 25. Qual è questo numero?

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=25$$

$$12\cdot\frac{12x+6x+4x+3x}{12}=\frac{300}{12}\cdot 12$$

$$25x=300$$

$$x=\frac{300}{25}=12$$

E. 48

Trova il numero naturale che addizionato al suo successivo dia 563.

$$x+x+1=563$$

$$2x=563-1$$

$$2x=562$$

$$x=\frac{562}{2}=281$$

E. 49

Un numero è tale che il suo triplo diminuito di 6 è uguale alla sua terza parte aumentata di 2. Determina il numero.

$3x-6=\frac{1}{3}x+2$

$3\cdot\frac{3(3x-6)}{3}=\frac{x+6}{3}\cdot 3$

$9x-18=x+6$

$9x-x=6+18$

$8x=24$

$x=\frac{24}{8}=3$

E. 50

La somma dei $\frac{3}{2}$ di un numero i suoi $\frac{5}{7}$ è 31. Calcola quel numero.

$\frac{3}{2}x+\frac{5}{7}x=31$

$14\cdot\frac{21x+10x}{14}=\frac{434}{14}\cdot 14$

$31x=434$

$x=\frac{434}{31}=14$

E. 51

La differenza tra un numero e la metà del suo consecutivo è 13. Calcola quel numero.

$x-\frac{1}{2}(x+1)=13$

$x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=13$

$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=13$

$2\cdot\frac{x-1}{2}=\frac{26}{2}\cdot 2$

$x-1=26$

$x=26+1$

$x=27$

E. 52

Trova due numeri sapendo che la loro somma è 15 e che uno è i $\frac{2}{3}$ dell'altro.

$x + \frac{2}{3}x = 15$

$3 \cdot \frac{3x + 2x}{3} = \frac{45}{3} \cdot 3$

$5x = 45$

$x = \frac{45}{5} = 9$

L'altro numero è: $15 - 9 = 6$

E. 53

Trova due numeri sapendo che la loro differenza è 6 e che uno è i $\frac{7}{5}$ dell'altro.

$\frac{7}{5}x - x = 6$

$5 \cdot \frac{7x - 5x}{5} = \frac{30}{5} \cdot 5$

$2x = 30$

$x = \frac{30}{2} = 15$

L'altro numero è: $15 + 6 = 21$

E. 54

La somma di due numeri è 24 e uno è i $\frac{5}{3}$ dell'altro. Calcola i due numeri.

$x + \frac{5}{3}x = 24$

$3 \cdot \frac{3x + 5x}{3} = \frac{72}{3} \cdot 3$

$8x = 72$

$x = \frac{72}{8} = 9$

L'altro numero è: $24 - 9 = 15$

E. 55

La differenza tra due numeri è 12 e uno è i $\frac{3}{2}$ dell'altro. Calcola i due numeri.

$\frac{3}{2}x - x = 12$

$2 \cdot \frac{3x - 2x}{2} = \frac{24}{2} \cdot 2$

$x = 24$

L'altro numero è: $24 + 12 = 36$

1. EQUAZIONI DI PRIMO GRADO (LINEARI) IN UN' INCOGNITA

Si chiama **equazione** un'uguaglianza fra due espressioni letterali , per la quale si cercano i valori da attribuire alle lettere, dette **incognite**, per renderla vera.

Esempio: l'equazione $\underbrace{7x - 4}_{\text{I membro}} = \underbrace{3}_{\text{II membro}}$ (1)

è verificata per x = 1

infatti, se nella (1) sostituiamo ad x il numero 1, otteniamo che l'uguaglianza è verificata:

$$7 \cdot 1 - 4 = 3$$

$$\mathbf{3 = 3}$$

- Le espressioni che compaiono a sinistra e a destra dell'uguale vengono chiamate rispettivamente **primo membro** e **secondo membro** dell'equazione.

- I valori (numeri) che sostituiti alle lettere verificano l'uguaglianza vengono chiamati **soluzioni o radici dell'equazione**.

- Si dice **grado di un'equazione** l'esponente massimo con cui compare l'incognita x.

-Le equazioni di primo grado vengono dette **equazioni lineari**.

<u>Soluzioni di un'equazione</u>: Un'equazione si dice:

- **determinata** se ha un numero finito di soluzioni (nel caso di un'equazione di primo grado è una sola);

-**indeterminata** se ha infinite soluzioni;

- impossibile se non ammette soluzioni.

Tipi di equazioni: le equazioni possono essere:

Numeriche: oltre l'incognita, contengono solo numeri;

Letterali: oltre l'incognita, contengono altre lettere;

Intere: l'incognita è presente solo al numeratore;

Fratte: l'incognita è presente anche al denominatore;

Esempi:

numerica intera	Numerica fratta	Letterale intera	Letterale Fratta	Letterale fratta
$\frac{1}{2}x = \frac{x+3}{5}$	$\frac{1}{x} = 2 - x$	$ax = \frac{1}{2}$	$\frac{a}{x} = b$	$\frac{a}{x} = b$

2. PRINCIPI DI EQUIVALENZA:

Due equazioni contenenti la stessa incognita sono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Esempio: **x + 5 = 9** e **x - 4 = 0** sono equivalenti perchè entrambe hanno come unica soluzione **4**.

Come risolvere le equazioni:

•Non esiste un metodo unico per la risoluzione di tutti i tipi di equazioni. Vi sono però due principi di equivalenza che hanno validità di carattere generale.

__**Primo principio di equivalenza** delle equazioni__:

"***Data un'equazione, se si aggiunge (o si toglie) ai due membri uno stesso numero o una stessa espressione, si ottiene un'equazione equivalente".***

Esempio: ***3x + 2 = 7*** è equivalente a

$3x + 2 \mathbf{- 2} = 7 \mathbf{- 2}$ (tolgo 2 ad ambo i membri)

Dal primo principio discendono due regole:

- **Regola del trasporto.** È possibile spostare un termine da un membro all'altro, purché lo si cambi di segno, ottenendo un'equazione equivalente.

Esempio: data l'equazione $\mathbf{2x - 5 = x + 6}$ posso aggiungere al I e II membro il numero 5 ed ottengo:

$2x - 5 \mathbf{+ 5} = x + 6 \mathbf{+ 5}$ ovvero $\mathbf{2x = x + 6 + 5}$, quindi il $- 5$ passando dal I membro al II membro ha cambiato il segno.

- Regola di cancellazione. E' possibile eliminare due termini uguali che compaiono uno nel primo membro e l'altro nel secondo.

Esempio: $2x - 4 + \cancel{2} = x + \cancel{2}$

Secondo principio di equivalenza delle equazioni:

"Data un'equazione, se si moltiplicano o si dividono i due membri per uno stesso numero o espressione diversi da 0, si ottiene un'equazione equivalente".

Esempio: $3x = 5$ è equivalente a $\frac{3x}{3} = \frac{5}{3} \longrightarrow x = \frac{5}{3}$

Dal secondo principio discendono due regole.

- **Regola della divisione per un fattore comune**.

Se tutti i termini di un'equazione hanno un fattor comune, si possono dividere tutti i termini per tale fattore, ottenendo un'equazione equivalente.

Esempio:

$6x - 10 = 12$ posso divedere tutti i termini per **2** $\frac{6x}{2} - \frac{10}{2} = \frac{12}{2} \longrightarrow 3x - 5 = 6$

- Regola del cambiamento del segno:

Moltiplicando entrambi i membri di un'equazione per − 1 è possibile cambiare segno a tutti i termini, ottenendo un'equazione equivalente.

• **ESEMPIO** $-3x + 2 = +5$

$$\downarrow$$

$+3x - 2 = -5$

3. LE EQUAZIONI NUMERICHE INTERE

Sono equazioni di I grado tutte quelle che si possono ricondurre alla forma ax = b.

- se a ≠ 0 l'equazione ammette soluzione x = b/a

- se a = 0 e b = 0 l'equazione è indeterminata, ovvero ogni numero è soluzione.

- se a = 0 e b ≠ 0 l'equazione è impossibile cioè non ammette soluzione.

Risoluzione di un'equazione numerica a coefficienti interi:

Esempio 1. Risolviamo l'equazione

$$3x + 2 = x - 1$$

Trasportiamo tutti i termini contenenti l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo membro:

$3x - x = -2 - 1$ addizioniamo i termini simili:

$2x = -3$ dividiamo tutte e due i membri per 2

$\frac{2x}{2} = \frac{-3}{2}$ **otteniamo come soluzione:**

$x = -\frac{3}{2}$.

L'equazione ha una sola soluzione, cioè – 3/2 ed è **determinata.**

Esempio 2. Risolviamo l'equazione

$$3x - 2 - 2x + 3 = x + 1$$

Trasportiamo tutti i termini contenenti l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo membro:

$3x - 2x - x = 2 - 3 + 1$ addizioniamo i termini simili

$0.x = 0$.

Poiché qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0, l'equazione ha infinite soluzioni. In tal caso diciamo che l'equazione è **indeterminata**.

Esempio 3. Risolviamo l'equazione:

$$3x - 1 = 3(x - 1)$$

Eseguiamo la moltiplicazione al II membro:

$3x - 1 = 3x - 3$

Trasportiamo tutti i termini contenenti l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo membro:

$3x - 3x = 1 - 3$ addizioniamo i termini simili

$0x = -2$, ovvero, poiché nessun numero moltiplicato per zero dà – 2 , l'equazione non ha soluzione e diciamo che è **impossibile.**

($0x = -2 \rightarrow 0 = -2$ uguaglianza falsa → equazione impossibile)

4. Risoluzione di equazioni numeriche a coefficienti fratti.

Risolviamo l' equazione:

$$\frac{2x+1}{2} - \frac{2}{3} = 2x + \frac{5}{6}$$

Calcoliamo il m.c.m. dei denominatori, nel nostro caso **m.c.m(2,3,6)=6** e scriviamo tutti i termini dell'equazione con denominatore 6:

$$.\frac{3(2x+1)}{6} - \frac{2.(2)}{6} = .\frac{6.(2x)}{6} + \frac{5}{6} \quad \text{ossia:}$$

Otteniamo: $.\frac{6x+3}{6} - \frac{4}{6} = .\frac{12x}{6} + \frac{5}{6}$

E moltiplicando tutto per 6 (applico il secondo principio), i denominatori possono essere tolti e rimane da risolvere l'equazione intera:

$6x + 3 - 4 = 12x + 5$

Trasportiamo tutti i termini contenenti l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo membro:

$6x - 12x = 5 - 3 + 4$ addiziono i termini simili

$-6x = 6$ divido per -6 tutte e due i membri: $\frac{-6x}{-6} = \frac{6}{-6}$ ed otteniamo:

$x = -1$. L'equazione è **determinata.**

Esercizi A: Risolvi le seguenti equazioni Trasportando tutti i termini contenenti l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo membro, tenendo presente che quando spostiamo un termine da un membro all'altro bisogna cambiare il suo segno. 1) $5x - 11 - 4x = -10$ [1] 2) $4x - 3 = 3x - 1$ [2] 3) $16x + 5 = 15x - 10$ [-15] 4) $4x + 4 = 1 + x$ [-1] 5) $3x + 3 = 3x + 5$ [impossibile] 6) $4x + 3 = 3x + x + 3$ [indeterminata] 5) $x + 2 - (11 - x) + 4 = 3 - (x - 8) + 2(x - 8)$ [0] 6) $3 - (2+x) - 3 + 5x = x + 2x - 7$ [-5] 7) $5(x - 3) - 2(3x - 1) = 3(1 - 4x)$ [16/11] **Per la n. 1 e la n. 2 verifica la soluzione**	**Esercizio B**: Risolvi le seguenti equazioni, dove bisogna sviluppare quadrati di binomio, ricordando la regola: $(a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$ 1) $(x + 5)^2 = (x+5)(x - 5)$ [- 5] 2) $(x+2)^2 = (x - 1)^2 + 2x - 1$ [- 1] 3) $(x+1)^2 + 2x + 3 = (x + 2)(x - 2)$ [- 2]
Esercizio C) Risolvi le seguenti equazioni riconducendo tutti i termini allo stesso denominatore: 1) $\frac{x+1}{6} - \frac{4+5x}{12} = 0$ [- 2/3] 2) $\frac{2x-5}{12} = \frac{x+1}{6} - \frac{1}{3}$ [impossibile] 3) $\frac{2x-5}{3} + \frac{x+10}{2} = x - \frac{x-12}{4}$ [- 4/5]	

DAL PROBLEMA ALLE EQUAZIONI

- Tradurre le informazioni fornite dal problema in equazioni

<u>Problemi numerici</u>:

Esempio 1: Determina quel numero che sommato alla sua terza parte è uguale al triplo del numero aumentato di 1.

Il numero che non conosciamo lo indichiamo con la lettera x (detta appunto incognita)

Dati del problema: la terza parte di un numero si ottiene dividendolo per il numero 3 → $\frac{x}{3}$;

il triplo di un numero si ottiene moltiplicando per il numero 3 → 3x

Traducendo il problema in equazione si ottiene: $x + \frac{x}{3} = 3x + 1$ che è un'equazione a coefficienti fratti e risolvendola si ottiene: $\frac{3x + x}{3} = \frac{9x+3}{3}$ → $3x + x - 9x = 3$ →

$-5x = 3 \rightarrow x = -3/5$

Esempio 2. Due numeri naturali sono tali che il secondo supera il primo di 2 e la somma tra il quadruplo del primo e il secondo è 27. Troviamo i due numeri.

Indichiamo con x il primo numero, l'equazione risolvente il problema sarà:

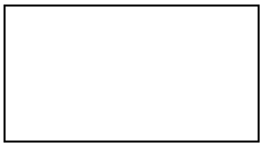
$$\underbrace{4x}_{\text{quadruplo del primo numero}} + \underbrace{(x + 2)}_{\text{secondo numero}} = 27 \rightarrow 5x + 2 = 27 \rightarrow 5x = 25 \qquad x = 25/5 = 5$$

Esempio 3. Determina quel numero x che sommato al suo successivo dà come risultato 15.

$$\underbrace{x}_{\text{numero}} + \underbrace{(x + 1)}_{\text{successivo del numero x}} = 15 \qquad \rightarrow 2x = 15 - 1 \rightarrow 2x = 14 \rightarrow x = 14/2 = 7$$

<u>Problemi di tipo geometrico</u>:

Esempio 1) Determina le dimensioni di un campo rettangolare, sapendo che la base è il doppio dell'altezza aumentata di 2 cm e il perimetro è 28 cm.



x

2x + 2

Indicando con l'incognita x l'altezza, la base sarà $2x + 2$ e calcolando il perimetro noto l'equazione risolvente il problema sarà:

2· base + 2· altezza = perimetro ovvero

$2 \cdot (2x + 2) + 2 \cdot x = 28$ risolvendo l'equazione:

$4x + 4 + 2x = 28 \rightarrow 4x + 2x = 28 - 4 \rightarrow 6x = 24 \rightarrow x = 24/6 = 4$

Quindi l'altezza è 4 e la base è 10.

<u>Esermpio 2.</u> Dividi un segmento lungo 56 cm in due parti delle quali una è i 4/3 dell'altra. Quali sono le lunghezze dei segmenti che si ottengono? [24 cm, 32 cm]

Indichiamo con x e y le lunghezze dei due segmenti. Un segmento è i 4/3 dell'altro

e supponiamo che sia quindi $y = \frac{4}{3}x$.

La somma dei due segmenti sarà uguale a 56 cm: $x + y = 56$ e potendo porre al posto di $y \rightarrow \frac{4}{3}x$ l'equazione diventa : $x + \frac{4}{3}x = 56$. Risolvendo l'equazione, si moltiplica tutto per 3 : $3x + 4x = 56 \cdot 3 \rightarrow 7x = 168 \rightarrow x = 168/7 = 24$.

Il segmento $y = 56 - x = 56 - 24 = 32$ (oppure $y = \frac{4}{3}x = \frac{4}{3} \cdot 24 = 32$).

<u>Problemi dalla realtà</u>:

Esempio 2. Un televisore, dopo che è stato praticato uno sconto del 12% sul prezzo originario, è stato pagato 308 euro. Qual era il prezzo originario del televisore?

Indichiamo con x il prezzo originario del televisore;
sconto subito dal prezzo del televisore = 12% = 12/100
prezzo scontato = 308 euro

Quindi

prezzo originario meno il 12% del prezzo originario = prezzo scontato

$\mathbf{x - \frac{12}{100}x = 308} \longrightarrow$ **essendo** $\frac{12}{100} = \frac{3}{25}$ e l'equazione risolvente diventa:

$\mathbf{x - \frac{3}{25}x = 308}$ e risolvendo l'equazione moltiplicando tutti i termini per 25:

$25x - 3x = 308 \cdot 25 \quad \rightarrow \quad 22x = 308 \cdot 25 \quad \rightarrow \quad x = \frac{308 \cdot 25}{22} = 350$

Esempio 3.

Carla e Anna sono due sorelle nate rispettivamente nel 1989 e nel 1997. In che anno Carla avrà il doppio dell'età di Anna?

Indichiamo con X l' età di Carla e con Y l'età di Anna. Tra loro ci sono 8 anni di differenza (1997 - 1989 = 8) e possiamo scrivere che:

età di Carla = età di Anna + 8 → $X = Y + 8$ (1)

Cosa accade quando $X = 2Y$? Quanti anni avrà Anna? Basta sostituire nell'equazione (1) al posto di $X \rightarrow 2Y$ e si ottiene: $2Y = Y + 8$ che ci consente di determinare l'età di Anna quando Carla avrà il doppio dell'età di Anna:

$2Y - Y = 8 \rightarrow Y = 8$. Siamo nell'anno 1997 + 8 = 2005.

001- **Quattro equazioni di primo grado con frazioni**

Equazione A

(da Flaccavento-Romano, Obiettivi e metodi, Algebra, Fabbri)

$$\frac{3(x-1)}{3}-\frac{2x+1}{3}=1-\frac{4(2x+3)}{6}$$

risoluzione

$$\frac{6(x-1)-2(2x+1)}{6}=\frac{6-4(2x+3)}{6}$$

$$6x-6-4x-2=6-8x-12$$

$$6x-4x+8x=6-12+6+2$$

$$10x=2$$

$$x=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

---

verifica

1° membro

$$\frac{3\left(\frac{1}{5}-1\right)}{3}-\frac{2\cdot\frac{1}{5}+1}{3}=$$

$$=\frac{3\left(\frac{1-5}{5}\right)}{3}-\frac{\frac{2+5}{5}}{3}=$$

$$=\frac{3\left(-\frac{4}{5}\right)}{3}-\frac{\frac{7}{5}}{3}=$$

$$=-\frac{12}{5}\cdot\frac{1}{3}-\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=-\frac{12}{15}-\frac{7}{15}=-\frac{19}{15}$$

2° membro

$$1-\frac{4\left(2\cdot\frac{1}{5}+3\right)}{6}=1-\frac{4\left(\frac{2+15}{5}\right)}{6}=$$

$$1-\frac{4\cdot\frac{17}{5}}{6}=1-\frac{\frac{68}{5}}{6}=1-\frac{68}{5}\cdot\frac{1}{6}=$$

$$1-\frac{34}{15}=\frac{15-34}{15}=-\frac{19}{15}$$

Equazione B
(da Flaccavento-Romano, Obiettivi e metodi, Algebra)

$$\frac{x+1}{10}-\frac{2(2x-15)}{15}-\frac{x-11}{3}=\frac{2(7x-32)}{15}$$

risoluzione

$$\frac{3(x+1)-4(2x-15)-10(x-11)}{30}=\frac{4(7x-32)}{30}$$

$$3x+3-8x+60-10x+110=28x-128$$

$$3x-8x-10x-28x=-128-3-60-110$$

$$-43x=-301$$

$$x=\frac{-301}{-43}=+7$$

verifica

1° membro

$$\frac{7+1}{10}-\frac{2(2\cdot 7-15)}{15}-\frac{7-11}{3}=$$

$$=\frac{8}{10}-\frac{2(14-15)}{15}-\frac{-4}{3}=$$

$$=\frac{4}{5}-\frac{2(-1)}{15}+\frac{4}{3}=$$

$$=\frac{4}{5}+\frac{2}{15}+\frac{4}{3}=\frac{12+2+20}{15}=\frac{34}{15}$$

2° membro

$$\frac{2(7\cdot 7-32)}{15}=$$

$$\frac{2(49-32)}{15}=$$

$$\frac{2\cdot 17}{15}=\frac{34}{15}$$

Equazione C
(Da Linardi-Galbusera, Percorsi di Algebra, Mursia)

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{2-x}{2}=\frac{x+1}{5}+\frac{2}{5}$$

risoluzione

$$\frac{10(2x-1)-15(2-x)}{30}=\frac{6(x+1)+12}{30}$$

$$20x-10-30+15x=6x+6+12$$

$$20x+15x-6x=6+12+10+30$$

$$29x=58$$

$$x=\frac{58}{29}=2$$

verifica

1° membro

$$\frac{2\cdot 2-1}{3}-\frac{2-2}{2}=$$

$$\frac{4-1}{3}-0=\frac{3}{3}=1$$

2° membro

$$\frac{2+1}{5}+\frac{2}{5}=$$

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}=1$$

Equazione D
(da Flaccavento-Romano, Obiettivi e metodi, Algebra, Fabbri)

$$\frac{3(1-x)}{4}-\frac{2x+1}{3}=\frac{5-2x}{3}-\frac{7x-1}{8}$$

risoluzione

$$\frac{18(1-x)-8(2x+1)}{24}=\frac{8(5-2x)-3(7x-1)}{24}$$

$$18-18x-16x-8=40-16x-21x+3$$

$$-18x-16x+16x+21x=40+3-18+8$$

$$3x=33$$

$$x=\frac{33}{3}=11$$

Verifica

1° membro

$$\frac{3(1-11)}{4}-\frac{2\cdot 11+1}{3}=$$

$$=\frac{3(-10)}{4}-\frac{23}{3}=-\frac{30}{4}-\frac{23}{3}=$$

$$=-\frac{15}{2}-\frac{23}{3}=\frac{-45-46}{6}=\frac{-91}{6}$$

2° membro

$$\frac{5-2\cdot 11}{3}-\frac{7\cdot 11-1}{8}=$$

$$=\frac{5-22}{3}-\frac{77-1}{8}=$$

$$=-\frac{17}{3}-\frac{76}{8}=-\frac{17}{3}-\frac{19}{2}=$$

$$=\frac{-34-57}{6}=-\frac{91}{6}$$

002 - Equazioni di primo grado con frazioni

Equazione A

$$\frac{3x-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{2(2x+3)}{5}-\frac{x+3}{2}$$

risoluzione

$$\frac{5(3x-1)-10}{20}=\frac{8(2x+3)-10(x+3)}{20}$$

$$15x-5-10=16x+24-10x-30$$

$$15x-16x+10x=24-30+5+10$$

$$9x=9$$

$$x=\frac{9}{9}=1$$

verifica

$$\frac{3\cdot 1-1}{4}-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{2}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

$$\frac{2(2\cdot 1+3)}{5}-\frac{1+3}{2}=$$

$$\frac{2(2+3)}{5}-\frac{4}{2}=$$

$$\frac{2\cdot 5}{5}-\frac{2}{1}=\frac{10}{5}-2=2-2=0$$

Equazione B

$$\frac{2x+3}{2}-\frac{3(x+2)}{4}=\frac{1}{3}-\frac{2-x}{3}$$

risoluzione

$$\frac{6(2x+3)-9(x+2)}{12}=\frac{4-4(2-x)}{12}$$

$$12x+18-9x-18=4-8+4x$$

$$12x-9x-4x=4-8$$

$$-x=-4$$

$$x=4$$

verifica

$$\frac{2\cdot 4+3}{2}-\frac{3(4+2)}{4}=$$

$$\frac{8+3}{2}-\frac{3\cdot 6}{4}=\frac{11}{2}-\frac{18}{4}=\frac{11}{2}-\frac{9}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$\frac{1}{3}-\frac{2-4}{3}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{-2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$$

Equazione C

$$\frac{2(x+3)}{15}=\frac{2x+1}{3}-\frac{x-2}{5}$$

Risoluzione

$$\frac{2(x+3)}{15}=\frac{5(2x+1)-3(x-2)}{15}$$

$$2x+6=10x+5-3x+6$$

$$2x-10x+3x=5+6-6$$

$$-5x=5$$

$$x=\frac{5}{-5}=-1$$

Verifica

$$\frac{2(-1+3)}{15}=\frac{2\cdot 2}{15}=\frac{4}{15}$$

$$\frac{2(-1)+1}{3}-\frac{-1-2}{5}=$$

$$\frac{-2+1}{3}-\frac{-3}{5}=-\frac{1}{3}+\frac{3}{5}=$$

$$\frac{-5+9}{15}=\frac{4}{15}$$

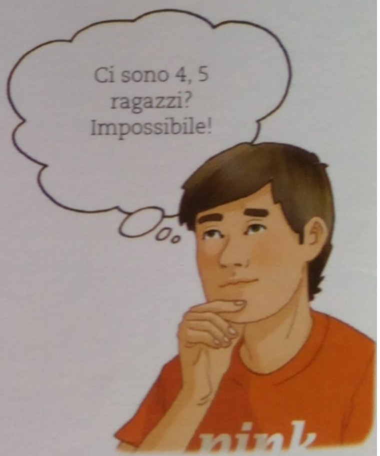
Problemi ed equazioni

Abbiamo esaminato equazioni e disequazioni in quanto, come dicevamo, ci porteranno adesso alla **risoluzione algebrica** dei problemi, ovvero alla risoluzione di un problema (aritmetico, geometrico, di fisica o altro) mediante un'equazione o una disequazione.
La risoluzione algebrica di un problema consta di alcune fasi:

- lettura e analisi del testo;
- individuazione dei dati in equazione o disequazione;
- scelta dell'incognita;
- traduzione dei dati in equazione o disequazione;
- risoluzione dell'equazione o della disequazione;
- discussione della soluzione.

La prima fase ci permette di capire il problema e quindi di acquisire i dati e le loro relazioni. In base a queste relazioni si affronta la scelta dell'incognita e la traduzione del problema in equazione o disequazione. Risolta tale equazione o disequazione, si passa alla discussione della soluzione, l'ultima fase che ci permetterà di stabilire se la soluzione trovata è "**accettabile**" o meno per il nostro problema.
Non sempre, infatti, la soluzione è adatta al problema.
Ad esempio:

- se l'incognita del problema è la misura di una grandezza, si può accettare come soluzione solo un numero naturale o decimale positivo, una qualsiasi altra soluzione dell'equazione non può essere accettabile;
- se l'incognita del problema è il numero di persone, oggetti, animali o cose, la soluzione dell'equazione deve essere un numero intero positivo, una soluzione negativa o frazionaria dell'equazione non sarà accettabile.



Risolviamo adesso alcuni problemi aritmetici e geometrici mediante l'**uso delle equazioni**.

1° problema

Il triplo di un numero naturale diminuito di 1/2 è uguale al suo doppio. Calcolare questo numero naturale.

Risoluzione

DATI	**RICHIESTA**
$3n - \frac{1}{2} = 2n$	$n = ?$

Indicando con x l'incognita, avremo l'equazione risolutiva: $\mathbf{3x - \frac{1}{2} = 2x}$.

Risolviamola: $3x - \frac{1}{2} = 2x \quad 6x - 1 = 4x \quad 6x - 4x = +1 \quad 2x = +1 \quad x = \frac{1}{2}$

La soluzione dell'equazione, $\mathbf{x = \frac{1}{2}}$, **non è accettabile** perché è un numero razionale e la richiesta del problema è di un numero naturale.
Diciamo che il problema è **impossibile**.

2° problema

Determinare due numeri naturali la cui somma è 32 e tali che il secondo sia i 3/5 del primo.

Risoluzione

DATI

$n_1 + n_2 = 32$

$n_2 = \frac{3}{5}n_1$

RICHIESTE

$n_1 = ?$

$n_2 = ?$

Se indichiamo con x la prima incognita n_1, avremo $n_2 = \frac{3}{5}x$ e quindi l'equazione risolutiva sarà: $\mathbf{x + \frac{3}{5}x = 32}$.

Risolviamola: $x + \frac{3}{5}x = 32 \quad 5x + 3x = 160 \quad 8x = 160 \quad \mathbf{x} = \frac{160}{8} = \mathbf{20}$

Le soluzioni del problema sono quindi: $\mathbf{n_1 = 20}$ e $\mathbf{n_2} = \frac{3}{5} \cdot 20 = \mathbf{12}$.

Sono soluzioni **accettabili** perché entrambi numeri naturali.

3° problema

Se al quadruplo di un numero naturale togliamo 6, il risultato è uguale al triplo del numero stesso più 3. Qual è questo numero?

Risoluzione

DATI

$4n - 6 = 3n + 3$

RICHIESTA

$n = ?$

Se indichiamo con x la richiesta del problema, avremo l'equazione risolutiva: $\mathbf{4x - 6 = 3x + 3}$.

Risolviamola: $4x - 3x = 3 + 6 \quad \mathbf{x = 9}$

La soluzione dell'equazione, $\mathbf{x = 9}$, **è accettabile** perché 9 è un numero naturale.

4° problema

Una comitiva di turisti è formata da 54 persone. Se il numero delle donne fosse il doppio e quello degli uomini il triplo di quello effettivo, la comitiva risulterebbe composta da 136 persone. Quanti sono gli uomini e quante le donne?

Risoluzione

DATI

n_1 (donne) + n_2 (uomini) = 54

$2\,n_1 + 3\,n_2 = 136$

RICHIESTE

$n_1 = ?$

$n_2 = ?$

Indicando con x il numero delle donne, avremo: $n_1 = x$, $n_2 = 54 - x$, quindi l'equazione risolutiva sarà: $\mathbf{2x + 3(54 - x) = 136}$.

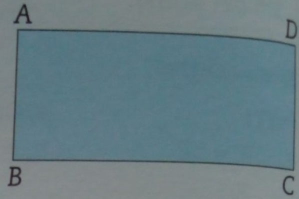
Risolviamola: $2x + 3(54 - x) = 136 \quad 2x + 162 - 3x = 136 \quad 2x - 3x = 136 - 162$

$-x = -26 \quad \mathbf{x = 26}$

Le soluzioni del problema sono quindi: $\mathbf{n_1}$ **(donne)** $\mathbf{= 26}$ e $\mathbf{n_2}$ **(uomini)** $= 54 - 26 = \mathbf{28}$.
Le soluzioni sono **accettabili** perché entrambi numeri naturali adatti a rappresentare numeri di persone.

5° problema

Il perimetro di un rettangolo è di 280 cm e le due dimensioni sono una i 2/3 dell'altra. Calcolare la misura dei lati del rettangolo.



Risoluzione

DATI	**RICHIESTE**
$2(AB + BC) = 280$ cm	$AB = ?$
$AB = \frac{2}{3}BC$	$BC = ?$

Indicando con x il lato BC, avremo: $BC = x$, $AB = \frac{2}{3}x$, quindi l'equazione risolutiva sarà: $\mathbf{2\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 280}$.

Risolviamola: $2\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 280$ $\quad 2x + \frac{4}{3}x = 280$ $\quad 6x + 4x = 840$ $\quad 10x = 840$
$\mathbf{x = 84}$

Le soluzioni del problema sono quindi $\overline{BC} = \mathbf{84\ cm}$, $\overline{AB} = \frac{2}{3} \cdot 84\ \text{cm} = \mathbf{56\ cm}$ e sono **accettabili** perché numeri che possono rappresentare la misura dei lati.

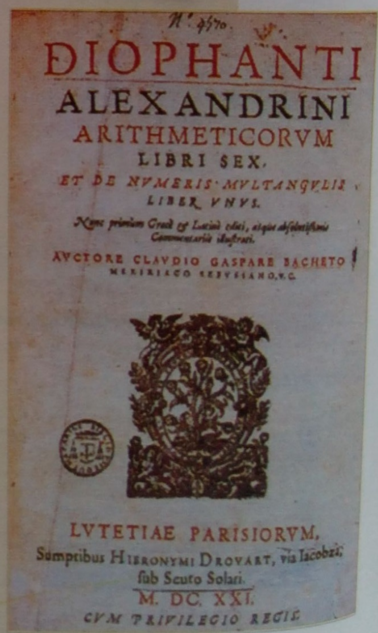
nella storia

A **Diofanto**, matematico greco vissuto tra il II e il III secolo d.C., si deve la prima esposizione sistematica del processo risolutivo di semplici equazioni. In una tra le sue più importanti opere, dal titolo ***Arithmeticorum*** ("Cose aritmetiche"), si legge una serie di problemi numerici risolti con equazioni di 1° e 2° grado.
Della vita di questo grande precursore dell'algebra moderna si conosce solo l'età in cui morì dall'epitaffio della sua tomba. Tale epitaffio non è altro che un problema algebrico, risolvendo il quale si può calcolare, appunto, l'età che Diofanto aveva quando morì. Leggiamolo.
"A Diofanto Dio concesse di rimanere fanciullo un sesto della sua vita, dopo un altro dodicesimo le sue guance si ricoprirono di barba, dopo un settimo egli si sposò e dopo cinque anni gli nacque un figlio.
Ma questi, giovane sventurato, aveva appena raggiunto la metà dell'età a cui doveva arrivare suo padre, quando morì. Diofanto visse nel dolore per la scomparsa dell'amato figlio quattro anni ancora, mitigando il proprio dolore con la scienza dei numeri, indi giunse al termine della sua esistenza."
Se indichiamo con x l'età alla quale Diofanto morì, avremo:

$$x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 \quad \text{da cui:} \quad x - \frac{1}{6}x - \frac{1}{12}x - \frac{1}{7}x - \frac{1}{2}x = 5 + 4$$

$$\frac{84 - 14 - 7 - 12 - 42}{84}x = 9 \quad \frac{9}{84}x = 9 \quad x = 9 \cdot \frac{84}{9} = 84$$

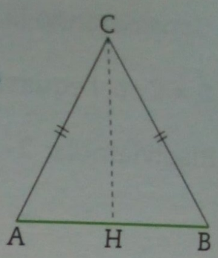
Diofanto morì dunque all'età di 84 anni.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus Hieronymi Drovart, via Iacobæa, sub Scuto Solari.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Frontespizio dell'*Arithmeticorum* di Diofanto.

6° problema

Il perimetro di un triangolo isoscele è 50 cm e ciascun lato obliquo supera la base di 4 cm. Calcolare le misure dei lati del triangolo.



Risoluzione

DATI

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 50$ cm

$BC = AB + 4$ cm

$CA = AB + 4$ cm

RICHIESTE

$AB = ?$

$BC = ?$

$CA = ?$

Indicando con x la base AB, avremo: $AB = x$, $BC = x + 4$, $CA = x + 4$, quindi l'equazione risolutiva sarà: $\mathbf{x + (x + 4) + (x + 4) = 50}$.

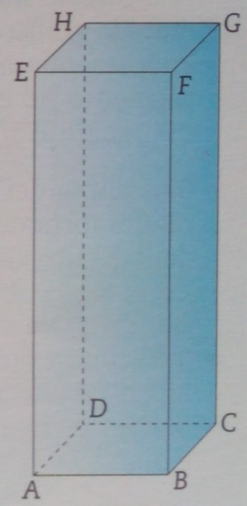
Risolviamola: $x + (x + 4) + (x + 4) = 50 \quad x + x + 4 + x + 4 = 50$

$$x + x + x = 50 - 4 - 4 \quad 3x = 42 \quad \mathbf{x} = \frac{42}{3} = \mathbf{14}$$

Le soluzioni del problema, $\overline{AB}$ = **14 cm**, $\overline{BC} = \overline{CA} = (14 + 4)$ cm = **18 cm**, sono **accettabili** perché i tre numeri possono rappresentare la misura dei lati.

7° problema

Un prisma retto quadrangolare ha l'altezza congruente al triplo dello spigolo di base. Sapendo che l'area della superficie laterale è 300 cm², calcolarne il volume.



Risoluzione

DATI

$EA = 3AB$

$S_l = 300$ cm²

RICHIESTA

$V = ?$

Indicando con x la misura dello spigolo di base, avremo: $DA = x$, $EA = 3x$.
Considerando la formula per il calcolo dell'area della superficie laterale: $S_l = p_b \cdot h$, l'equazione risolutiva sarà: $\mathbf{4x \cdot 3x = 300}$.

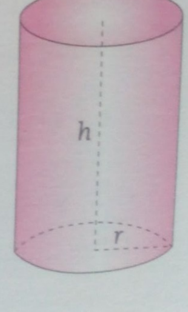
Risolviamola: $4x \cdot 3x = 300 \quad 12x^2 = 300 \quad x^2 = \dfrac{300}{12}$

$$x^2 = 25 \quad \mathbf{x} = \pm\sqrt{25} = \mathbf{\pm 25}$$

Considerando come soluzione accettabile quella positiva $\mathbf{x = 5}$, avremo:
DA = 5 cm, **EA** = $(3 \cdot 5)$ cm = **15 cm** e quindi $\mathbf{V} = 5^2 \cdot 15$ cm³ = **375 cm³**.

8° problema

In un cilindro il raggio di base è i 2/5 dell'altezza. Calcolare il volume del cilindro sapendo che l'area della superficie laterale è 405π cm².



Risoluzione

DATI

$r = \dfrac{2}{5}h$

$S_l = 405\pi$ cm²

RICHIESTA

$V = ?$

Indicando con x la misura dell'altezza, avremo: $h = x$, $r = \dfrac{2}{5}x$.

Considerando la formula per il calcolo dell'area della superficie laterale:

$S_l = C \cdot h$, l'equazione risolutiva sarà: $\mathbf{2 \cdot \frac{2}{5} x\pi \cdot x = 405\pi}$.

Risolviamola: $2 \cdot \frac{2}{5} x\pi \cdot x = 405\pi \quad \frac{4}{5}\pi x^2 = 405\pi \quad 4\pi x^2 = 2\,025\pi$

$$x^2 = \frac{2\,025\pi}{4\pi} = 506{,}25 \qquad \mathbf{x} = \pm\sqrt{506{,}25} = \pm\mathbf{22{,}5}$$

Considerando come soluzione accettabile quella positiva, $\mathbf{x = 22{,}5}$, avremo:

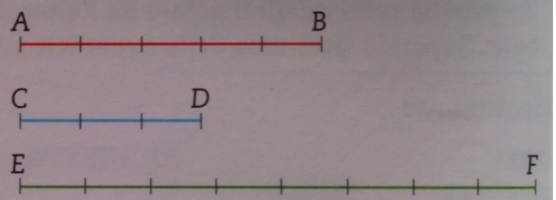
$\mathbf{h = 22{,}5\ cm}$, $r = \frac{2}{5} \cdot 22{,}5\ \text{cm} = \mathbf{9\ cm}$ e quindi: $\mathbf{V} = 81\pi \cdot 22{,}5\ \text{cm}^3 = \mathbf{1\,822{,}5\pi\ cm^3}$

••• per riflettere

La risoluzione algebrica dei problemi ti permette di trovare in modo più agevole la soluzione di problemi che, nel corso dei tuoi studi, hai imparato a risolvere applicando le conoscenze che possedevi e che spesso portavano a calcoli complessi. Vuoi rendertene conto? Osserva come risolvevi un problema in prima e in seconda e come puoi farlo adesso.

Problema: calcolare due numeri la cui somma è 120 sapendo che uno è i 3/5 dell'altro.

- In prima, quando hai imparato a utilizzare il calcolo frazionario, lo risolvevi con il metodo grafico.
  Rappresentiamo il numero maggiore con il segmento *AB* e il minore con il segmento *CD* uguale ai 3/5 di *AB*.



  La somma dei due numeri sarà rappresentata quindi dal segmento *EF* = *AB* + *CD*, che risulta formato da 5 + 3 parti. Sapendo che *AB* + *CD* = 120, possiamo dire che ciascuna delle 8 parti che forma il segmento *EF* è uguale a 120 : 8 = 15, per cui: $\overline{AB} = 15 \cdot 5 = 75$ e $\overline{CD} = 15 \cdot 3 = 45$. I due numeri sono **75** e **45**.

- In seconda, quando hai imparato a usare le proporzioni, lo risolvevi così.
  Siano x e y i due numeri, possiamo scrivere $x : y = 3 : 5$ e poiché $x + y = 120$, abbiamo:
  $(x + y) : x = (3 + 5) : 5 \quad 120 : x = 8 : 5$
  e quindi:

  $x = \frac{120 \cdot 5}{8} = 75$ e $y = 120 - 75 = 45$. I due numeri sono **75** e **45**.

- Adesso, in terza, puoi risolverlo algebricamente con un'equazione.
  Se i due numeri sono $a = x$ e $b = \frac{3}{5}x$, avremo l'equazione:

  $x + \frac{3}{5}x = 120 \quad 5x + 3x = 600 \quad 8x = 600$

  $x = \frac{600}{8} = 75$. Quindi $a = 75$ e $b = \frac{3}{5} \cdot 75 = 45$.

  I due numeri sono **75** e **45**.

Risolvi le seguenti equazioni di primo grado in una incognita ed esegui la verifica
di Andrea Simoncelli

E. 1

$x + 9 = 15$

$x = 15 - 9$

$x = 6$

Verifica

Primo membro

$6 + 9 =$

$= 15$

Secondo membro:

15

E. 2

$2x + 8 = 12$

$2x = 12 - 8$

$2x = 4$

$x = \frac{4}{2} = 2$

Verifica

Primo membro

$2 \cdot 2 + 8 =$

$= 4 + 8 =$

$= 12$

Secondo membro:

12

E. 3

$7x - 9 = 2x + 1$

$7x - 2x = 1 + 9$

$5x = 10$

$x = \frac{10}{5} = 2$

Verifica

Primo membro:

$7 \cdot 2 - 9 =$

$= 14 - 9 =$

$= 5$

Secondo membro:

$2 \cdot 2 + 1 =$

$= 4 + 1 =$

$= 5$

E. 4

$-2x+3=x-6$

$-2x-x=-6-3$

$-3x=-9$

$3x=9$

$x=\frac{9}{3}=3$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$-2\cdot 3+3=$

$=-6+3=$

$=-3$

Secondo membro:

$3-6=$

$=-3$

E. 5

$3(x+2)-2(x-3)=4-x$

$3x+6-2x+6=4-x$

$x+12=4-x$

$x+x=4-12$

$2x=-8$

$x=-\frac{8}{2}=-4$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$3\cdot(-4+2)-2\cdot(-4-3)=$

$=3\cdot(-2)-2\cdot(-7)=$

$=-6+14=$

$=8$

Secondo membro:

$4-(-4)=$

$=4+4=$

$=8$

E. 6

$3(x+1)-5x=x-15$

$3x+3-5x=x-15$

$-2x+3=x-15$

$-2x-x=-15-3$

$-3x=-18$

$3x=18$

$x=\frac{18}{3}=6$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$3\cdot(6+1)-5\cdot 6=$

$=3\cdot 7-30=$

$=21-30=$

$=-9$

Secondo membro:

$6-15=$

$=-9$

E. 7

$6(x+2)-9(x-1)=-2(3x+3)+3$

$6x+12-9x+9=-6x-6+3$

$-3x+21=-6x-3$

$-3x+6x=-3-21$

$3x=-24$

$x=-\frac{24}{3}=-8$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$6\cdot(-8+2)-9\cdot(-8-1)=$

$=6\cdot(-6)-9\cdot(-9)=$

$=-36+81=$

$=45$

Secondo membro:

$-2\cdot[3\cdot(-8)+3]+3=$

$=-2\cdot[-24+3]+3=$

$=-2\cdot[-21]+3=$

$=42+3=$

$=45$

E. 8

$5(x+1) \;=\; 2(x+7)$

$5x+5=2x+14$

$5x-2x=14-5$

$3x=9$

$x=\frac{9}{3}=3$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$5\cdot(3+1)=$

$=5\cdot 4=$

$=20$

Secondo membro:

$2\cdot(3+7)=$

$=2\cdot 10=$

$=20$

E. 9

$10(x+1) \;=\; 4(x+7)+6$

$10x+10=4x+28+6$

$10x+10=4x+34$

$10x-4x=34-10$

$6x=24$

$x=\frac{24}{6}=4$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$10\cdot(4+1)=$

$=10\cdot 5=$

$=50$

Secondo membro:

$4\cdot(4+7)+6=$

$=4\cdot 11+6=$

$=44+6=$

$=50$

E. 10

$4(x+2) = 2x+20$

$4x+8=2x+20$

$4x-2x=20-8$

$2x=12$

$x=\frac{12}{2}=6$

<u>Verifica</u>

Primo membro:	Secondo membro:
$4\cdot(6+2)=$	$2\cdot 6+20=$
$=4\cdot 8=$	$=12+20=$
$=32$	$=32$

E. 11

$3(4x-5)-5(2x-1)=5x-16$

$12x-15-10x+5=5x-16$

$2x-10=5x-16$

$2x-5x=-16+10$

$-3x=-6$

$3x=6$

$x=\frac{6}{3}=2$

<u>Verifica</u>

Primo membro:	Secondo membro:
$3\cdot(4\cdot 2-5)-5\cdot(2\cdot 2-1)=$	
$=3\cdot(8-5)-5\cdot(4-1)=$	$5\cdot 2-16=$
$=3\cdot 3-5\cdot 3=$	$=10-16=$
$=9-15=$	$=-6$
$=-6$	

E. 12

$11x-8=7(x-1)+x$

$11x-8=7x-7+x$

$11x-8=8x-7$

$11x-8x=-7+8$

$3x=1$

$x=\frac{1}{3}$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$11\cdot\frac{1}{3}-8$

$\frac{11}{3}-8$

$\frac{11-24}{3}$

$-\frac{13}{3}$

Secondo membro:

$7\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)+\frac{1}{3}=$

$=7\cdot\left(\frac{1-3}{3}\right)+\frac{1}{3}=$

$=7\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}=$

$=-\frac{14}{3}+\frac{1}{3}=$

$=-\frac{13}{3}$

E. 13

$5(x+3)=9-7x$

$5x+15=9-7x$

$5x+7x=9-15$

$12x=-6$

$x=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$5\cdot\left(-\frac{1}{2}+3\right)=$

$5\cdot\left(\frac{-1+6}{2}\right)=$

$=5\cdot\frac{5}{2}=$

$=\frac{25}{2}$

Secondo membro:

$9-7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=$

$=9+\frac{7}{2}=$

$=\frac{18+7}{2}=$

$=\frac{25}{2}$

E. 14

$$12(x-2)+4(x-3)=2x-8$$
$$12x-24+4x-12=2x-8$$
$$16x-36=2x-8$$
$$16x-2x=-8+36$$
$$14x=28$$
$$x=\frac{28}{14}=2$$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$$12\cdot(2-2)+4\cdot(2-3)=$$
$$=12\cdot 0+4\cdot(-1)=$$
$$=0-4=$$
$$=-4$$

Secondo membro:

$$2\cdot 2-8=$$
$$=4-8=$$
$$=-4$$

E. 15

$$4(x-6)-2(x-5)=4x+3(2+6x)$$
$$4x-24-2x+10=4x+6+18x$$
$$2x-14=22x+6$$
$$2x-22x=6+14$$
$$-20x=20$$
$$20x=-20$$
$$x=-\frac{20}{20}=-1$$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$$4\cdot(-1-6)-2\cdot(-1-5)=$$
$$=4\cdot(-7)-2\cdot(-6)=$$
$$=-28+12=$$
$$=-16$$

Secondo membro:

$$4\cdot(-1)+3\cdot[2+6\cdot(-1)]=$$
$$=-4+3\cdot[2-6]=$$
$$=-4+3\cdot[-4]=$$
$$=-4-12=$$
$$=-16$$

E. 16

$$4x-\{2x-1-[6+2x-(3x-1)]\}=0$$
$$4x-\{2x-1-[6+2x-3x+1]\}=0$$
$$4x-\{2x-1-[7-x]\}=0$$
$$4x-\{2x-1-7+x\}=0$$
$$4x-\{3x-8\}=0$$
$$4x-3x+8=0$$
$$x+8=0$$
$$x=-8$$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$$4\cdot(-8)-\{2\cdot(-8)-1-[6+2\cdot(-8)-(3\cdot(-8)-1)]\}=$$
$$=-32-\{-16-1-[6-16-(-24-1)]\}=$$
$$=-32-\{-16-1-[6-16-(-25)]\}=$$
$$=-32-\{-16-1-[6-16+25]\}=$$
$$=-32-\{-16-1-[-10+25]\}=$$
$$=-32-\{-16-1-15\}=$$
$$=-32-\{-17-15\}=$$
$$=-32-\{-32\}=$$
$$=-32+32=$$
$$=0$$

Secondo membro:

0

E. 17

$$\frac{x+6}{8}-\frac{(x-2)}{12}-\frac{(4-x)}{24}=\frac{5}{12}+\frac{x-4}{4}$$

$$24\cdot\frac{3(x+6)-2(x-2)-(4-x)}{24}=\frac{10+6(x-4)}{24}\cdot 24$$

$$3x+18-2x+4-4+x=10+6x-24$$

$$2x+18=6x-14$$

$$2x-6x=-14-18$$

$$-4x=-32$$

$$4x=32$$

$$x=\frac{32}{4}=8$$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$$\frac{8+6}{8}-\frac{8-2}{12}-\frac{4-8}{24}=$$

$$=\frac{14}{8}-\frac{6}{12}+\frac{4}{24}=$$

$$=\frac{7}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=$$

$$=\frac{21-6+2}{12}=$$

$$=\frac{17}{12}$$

Secondo membro:

$$\frac{5}{12}+\frac{8-4}{4}=$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{4}{4}=$$

$$=\frac{5}{12}+1=$$

$$=\frac{5+12}{12}=$$

$$=\frac{17}{12}$$

E. 18

$\frac{2}{3}x+2=x-\frac{3}{4}$

$12\cdot\frac{8x+24}{12}=\frac{12x-9}{12}\cdot 12$

$8x+24=12x-9$

$8x-12x=-9-24$

$-4x=-33$

$4x=33$

$x=\frac{33}{4}$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$\frac{2}{3}\cdot\frac{33}{4}+2=$

$=\frac{11}{2}+2=$

$=\frac{11+4}{2}=$

$=\frac{15}{2}$

Secondo membro:

$\frac{33}{4}-\frac{3}{4}=$

$=\frac{33-3}{4}=$

$=\frac{30}{4}=$

$=\frac{15}{2}$

E. 19

$3x+\frac{1}{2}=\frac{4}{7}$

$14\cdot\frac{42x+7}{14}=\frac{8}{14}\cdot 14$

$42x+7=8$

$42x=8-7$

$42x=1$

$x=\frac{1}{42}$

<u>Verifica</u>

Primo membro

$3\cdot\frac{1}{42}+\frac{1}{2}=$

$=\frac{1}{14}+\frac{1}{2}=$

$=\frac{1+7}{14}=$

$=\frac{8}{14}=$

$=\frac{4}{7}$

Secondo membro:

$\frac{4}{7}$

E. 20

$$\frac{x}{3}-1=\frac{x}{6}-\frac{1}{2}$$

$$6\cdot\frac{2x-6}{6}=\frac{x-3}{6}\cdot 6$$

$$2x-6=x-3$$

$$2x-x=-3+6$$

$$x=3$$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$$\frac{3}{3}-1=$$

$$=1-1=$$

$$=0$$

Secondo membro:

$$\frac{3}{6}-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=$$

$$=0$$

E. 21

$$\frac{x+3}{4}+\frac{2x-2}{3}=\frac{1}{12}$$

$$12\cdot\frac{3(x+3)+4(2x-2)}{12}=\frac{1}{12}\cdot 12$$

$$3x+9+8x-8=1$$

$$11x+1=1$$

$$11x=1-1$$

$$11x=0$$

$$x=\frac{0}{11}=0$$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=$$

$$=\frac{9-8}{12}=$$

$$=\frac{1}{12}$$

Secondo membro:

$$\frac{1}{12}$$

E. 22

$$1-\frac{x}{2}=\frac{x}{3}-x+\frac{4}{3}$$

$$6\cdot\frac{6-3x}{6}=\frac{2x-6x+8}{6}\cdot 6$$

$$6-3x=2x-6x+8$$

$$6-3x=-4x+8$$

$$-3x+4x=8-6$$

$$x=2$$

<u>Verifica</u>

Primo membro:

$$1-\frac{2}{2}=$$

$$=1-1=$$

$$=0$$

Secondo membro

$$\frac{2}{3}-2+\frac{4}{3}=$$

$$=\frac{2-6+4}{3}=$$

$$=0$$

E. 23

$$\frac{5}{2}x+5=3x-\frac{3}{2}x-5$$

$$2\cdot\frac{5x+10}{2}=\frac{6x-3x-10}{2}\cdot 2$$

$$5x+10=6x-3x-10$$

$$5x+10=3x-10$$

$$5x-3x=-10-10$$

$$2x=-20$$

$$x=-\frac{20}{2}=-10$$

<u>Verifica</u>

Primo membro

$$\frac{5}{2}\cdot(-10)+5=$$

$$=-25+5=$$

$$=-20$$

Secondo membro

$$3\cdot(-10)-\frac{3}{2}\cdot(-10)-5=$$

$$=-30+15-5=$$

$$=-15-5=$$

$$=-20$$

E. 24

$$\frac{5}{4}x-\frac{8}{3}=\frac{2x-5}{3}+\frac{3}{4}$$

$$12\cdot\frac{15x-32}{12}=\frac{4(2x-5)+9}{12}\cdot 12$$

$$15x-32=8x-20+9$$

$$15x-32=8x-11$$

$$15x-8x=-11+32$$

$$7x=21$$

$$x=\frac{21}{7}$$

<u>Verifica</u>

Primo membro

$$\frac{5}{4}\cdot 3-\frac{8}{3}=$$

$$=\frac{15}{4}-\frac{8}{3}=$$

$$=\frac{45-32}{12}=$$

$$=\frac{13}{12}$$

Secondo membro

$$\frac{(2\cdot 3-5)}{3}+\frac{3}{4}=$$

$$=\frac{(6-5)}{3}+\frac{3}{4}=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=$$

$$=\frac{4+9}{12}=$$

$$=\frac{13}{12}$$

E. 25

$$\frac{2(2x-24)}{3}+1+\frac{7x+14}{5}=-(2x-2)$$

$$\frac{4x-48}{3}+1+\frac{7x+14}{5}=2-2x$$

$$15\cdot\frac{5(4x-48)+15+3(7x+14)}{15}=\frac{15(2-2x)}{15}\cdot 15$$

$$20x-240+15+21x+42=30-30x$$

$$41x-183=30-30x$$

$$41x+30x=30+183$$

$$71x=213$$

$$x=\frac{213}{71}=3$$

<u>Verifica</u>

Primo membro

$$\frac{2\cdot(2\cdot 3-24)}{3}+1+\frac{7\cdot(3+2)}{5}=$$

$$=\frac{2\cdot(6-24)}{3}+1+\frac{7\cdot 5}{5}=$$

$$=\frac{2\cdot(-18)}{3}+1+7=$$

$$=-12+8=$$

$$=-4$$

Secondo membro

$$-(2\cdot 3-2)=$$

$$=-(6-2)=$$

$$=-4$$

Stabilisci quali equazioni sono indeterminate e quali sono impossibili

E. 26

$3(x+1)-2x = x-1$

$3x+3-2x = x-1$

$x+3 = x-1$ Equazione impossibile

$x-x = -1-3$

$0x = -4$

E. 27

$5x+4 = 3(x-2)+2x$

$5x+4 = 3x-6+2x$

$5x+4 = 5x-6$ Equazione impossibile

$5x-5x = -6-4$

$0x = -10$

E. 28

$2(x-3)-5 = 2x-11$

$2x-6-5 = 2x-11$

$2x-11 = 2x-11$ Equazione indeterminata

$2x-2x = -11+11$

$0x = 0$

E. 29

$2(x-4)+3x-9 = 5x-17$

$2x-8+3x-9 = 5x-17$

$5x-17 = 5x-17$ Equazione indeterminata

$5x-5x = -17+17$

$0x = 0$

E. 30

$12(x-3)+8x = 10(2x+5)$

$12x-36+8x = 20x+50$

$20x-36 = 20x+50$ Equazione impossibile

$20x-20x = 50+36$

$0x = 86$

E. 31

$5(2x+3) = 10+5(2x+1)$

$10x+15 = 10+10x+5$

$10x+15 = 15+10x$ Equazione indeterminata

$10x-10x = 15-15$

$0x = 0$

E. 32

$-7(x+1)=2-3x-4x$

$-7x-7=2-7x$

$-7x+7x=2+7$

$0x=9$

Equazione impossibile

E. 33

$5(x+2)=2x+3(x+1)$

$5x+10=2x+3x+3$

$5x+10=5x+3$

$5x-5x=3-10$

$0x=-7$

Equazione impossibile

E. 34

$7x+2(x+1)-4x=3x+2x+2$

$7x+2x+2-4x=5x+2$

$5x+2=5x+2$

$5x-5x=2-2$

$0x=0$

Equazione indeterminata

E. 35

$10x-10+5x=-20+15x$

$15x-10=-20+15x$

$15x-15x=-20+10$

$0x=-10$

Equazione impossibile

E. 36

$2\left(2x+\frac{1}{2}x\right)+3=3+5x$

$4x+x+3=3+5x$

$5x+3=3+5x$

$5x-5x=3-3$

$0x=0$

Equazione indeterminata

E. 37

$2(x+3)-6(x+2)=5(3+x)-9x$

$2x+6-6x-12=15+5x-9x$

$-4x-6=-4x+15$

$-4x+4x=15+6$

$0x=21$

Equazione impossibile

E. 38

$3(x+9)+2(3-x)=x-7$

$3x+27+6-2x=x-7$

$x+33=x-7$ Equazione impossibile

$x-x=-7-33$

$0x=-40$

E. 39

$9x-2(x+3)-2=5x+2x-8$

$9x-2x-6-2=7x-8$

$7x-8=7x-8$ Equazione indeterminata

$7x-7x=-8+8$

$0x=0$

E. 40

$3(2x-3)-7x=3(2+x)-2(2x-10)$

$6x-9-7x=6+3x-4x+20$

$-x-9=-x+26$ Equazione impossibile

$-x+x=26+9$

$0x=35$

Risolvi i seguenti problemi dopo aver impostato un'equazione di primo grado in una incognita

E. 41

Se da un numero si sottrae 9 si ottiene 12. Determina il numero.

$$x-9=12$$

$$x=12+9$$

$$x=21$$

E. 42

Un numero è tale che il suo doppio aumentato di 2 è uguale al suo triplo diminuito di 3. Determina il numero.

$$2x+2=3x-3$$

$$2x-3x=-3-2$$

$$-x=-5$$

$$x=5$$

E. 43

Un numero è tale che, addizionato alla sua metà e alla sua terza parte, dà come risultato 33. Determina il numero.

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=33$$

$$6\cdot\frac{6x+3x+2x}{6}=\frac{198}{6}\cdot 6$$

$$11x=198$$

$$x=\frac{198}{11}=18$$

E. 44

Un numero è tale che la sua metà aumentata della sua terza parte è uguale al numero stesso diminuito di 3. Determina il numero.

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=x-3$$

$$6\cdot\frac{3x+2x}{6}=\frac{6x-18}{6}\cdot 6$$

$$5x=6x-18$$

$$5x-6x=-18$$

$$-x=-18$$

$$x=18$$

E. 45

Un numero è tale che la somma della sua metà e della sua terza parte è uguale a 20. Determina il numero.

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=20$$

$$6\cdot\frac{3x+2x}{6}=\frac{120}{6}\cdot 6$$

$$5x=120$$

$$x=\frac{120}{5}=24$$

E. 46

Il triplo di un numero diminuito di 8 è uguale al numero stesso. Determina il numero.

$$3x-8=x$$

$$3x-x=8$$

$$2x=8$$

$$x=\frac{8}{2}=4$$

E. 47

Addizionando a un numero la sua metà, la sua terza parte la sua quarta parte si ottiene 25. Qual è questo numero?

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=25$$

$$12\cdot\frac{12x+6x+4x+3x}{12}=\frac{300}{12}\cdot 12$$

$$25x=300$$

$$x=\frac{300}{25}=12$$

E. 48

Trova il numero naturale che addizionato al suo successivo dia 563.

$$x+x+1=563$$

$$2x=563-1$$

$$2x=562$$

$$x=\frac{562}{2}=281$$

E. 49

Un numero è tale che il suo triplo diminuito di 6 è uguale alla sua terza parte aumentata di 2. Determina il numero.

$3x-6=\frac{1}{3}x+2$

$3\cdot\frac{3(3x-6)}{3}=\frac{x+6}{3}\cdot 3$

$9x-18=x+6$

$9x-x=6+18$

$8x=24$

$x=\frac{24}{8}=3$

E. 50

La somma dei $\frac{3}{2}$ di un numero i suoi $\frac{5}{7}$ è 31. Calcola quel numero.

$\frac{3}{2}x+\frac{5}{7}x=31$

$14\cdot\frac{21x+10x}{14}=\frac{434}{14}\cdot 14$

$31x=434$

$x=\frac{434}{31}=14$

E. 51

La differenza tra un numero e la metà del suo consecutivo è 13. Calcola quel numero.

$x-\frac{1}{2}(x+1)=13$

$x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=13$

$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=13$

$2\cdot\frac{x-1}{2}=\frac{26}{2}\cdot 2$

$x-1=26$

$x=26+1$

$x=27$

E. 52

Trova due numeri sapendo che la loro somma è 15 e che uno è i $\frac{2}{3}$ dell'altro.

$x+\frac{2}{3}x=15$

$3\cdot\frac{3x+2x}{3}=\frac{45}{3}\cdot 3$

$5x=45$

$x=\frac{45}{5}=9$

L'altro numero è: $15-9=6$

E. 53

Trova due numeri sapendo che la loro differenza è 6 e che uno è i $\frac{7}{5}$ dell'altro.

$\frac{7}{5}x-x=6$

$5\cdot\frac{7x-5x}{5}=\frac{30}{5}\cdot 5$

$2x=30$

$x=\frac{30}{2}=15$

L'altro numero è: $15+6=21$

E. 54

La somma di due numeri è 24 e uno è i $\frac{5}{3}$ dell'altro. Calcola i due numeri.

$x+\frac{5}{3}x=24$

$3\cdot\frac{3x+5x}{3}=\frac{72}{3}\cdot 3$

$8x=72$

$x=\frac{72}{8}=9$

L'altro numero è: $24-9=15$

E. 55

La differenza tra due numeri è 12 e uno è i $\frac{3}{2}$ dell'altro. Calcola i due numeri.

$\frac{3}{2}x-x=12$

$2\cdot\frac{3x-2x}{2}=\frac{24}{2}\cdot 2$

$x=24$

L'altro numero è: $24+12=36$